



香川高専

卒業研究論文

論文題目

基底共有型非負値行列因子分解に基づく
楽器音の共通・固有成分の分析と音色変換への応用

提出年月日	令和3年2月26日
学 科	電気情報工学科
氏 名	香西 海斗 印
指導教員（主査）	北村 大地 助教 印
副 査	雛元 洋一 助教 印
学 科 長	辻 正敏 教授 印

香川高等専門学校

Analysis of Common and Individual Components in Musical Instruments Based on Basis-Shared Nonnegative Matrix Factorization and Its Application to Timbre Conversion

Kaito Kozai

Department of Electrical and Computer Engineering
National Institute of Technology, Kagawa College

Abstract

In general, the artistic value of a personal performance or the musical instrument itself is subjectively evaluated by professional musicians when it exceeds a certain level of quality. However, there are few methods to quantitatively discuss these points without subjectivity. In particular, for those who are not familiar with music performance or musical instruments, there are no cues to judge the artistic value. As a result, they have to rely on the subjective evaluation of others. If it is possible to estimate acoustic features that objectively and quantitatively represent and evaluate the acoustic and artistic differences among the signals of musical instruments, such features can be utilized to design high-quality musical instruments. Also, it can be used for timber conversion, identification, and retrieval of musical instrument signals. In this paper, I propose a new method for analyzing multiple acoustic signals based on a matrix factorization theory called nonnegative matrix factorization (NMF). Using this method, I aim to establish a method for simultaneously extracting the common and individual acoustic features among the signals of musical instruments. These acoustic features become the cues to quantitatively discuss the differences of multiple musical instruments. In the experiment using two types of piano, I confirmed that the proposed method can extract the common and individual spectral components between the two pianos. On the basis of this result, it is expected that the timber difference among multiple musical instruments can quantitatively be represented, and objective evaluation among them will be possible. As an application, I applied the proposed method to a timber conversion task, which is achieved by replacing the individual features between two types of piano.

Keywords: nonnegative matrix factorization, musical instruments, common and individual features, timbre conversion

(和訳)

一般的に、個人の演奏や楽器本体の芸術的価値は、一定の品質を超える範囲において、評価者の主観に基づいて評価される。しかしながら、これらの観点について主観を廃して定量的に議論する方法はあまり確立されておらず、とくに音楽演奏や楽器に対して精通していない者にとっては、芸術的価値を判断する材料がないため他者の主観的評価に頼らざるを得ない。もし、複数の楽器音信号の音響的違いや芸術的違いを客観的かつ定量的に表現・評価する音響特徴量が推定できるならば、芸術的価値の高い楽器の設計製作や楽器音信号の音色変換、識別、検索等にも応用することが可能と考えられ、音楽という万人が親しむ芸術文化のさらなる興隆につながることを予想される。そこで本論文では、非負値行列因子分解 (nonnegative matrix factorization: NMF) と呼ばれる行列分解理論に基づく、複数音響信号の新しい解析手法を提案する。これを用いて、複数の楽器音信号間の「共通する音響特徴量」及び「固有の音響特徴量」を同時に推定・抽出し、楽器ごとの差を客観的かつ定量的に解析する方法の確立を目指す。2種類のピアノ音を題材とした実験では、両ピアノ音のスペクトルにおける共通・固有成分をそれぞれ抽出することができた。これらを用いて、楽器ごとの音色の差を定量的に表すことができ、複数の楽器音信号間の客観的な評価が可能となることが期待される。さらに、提案手法の応用として、2種類のピアノ音の固有音響特徴量を交換することで、音色変換に応用できることを示した。

目次

第 1 章	緒言	1
1.1	本論文の背景	1
1.2	本論文の目的	2
1.3	本論文の構成	2
第 2 章	音の時間周波数表現と NMF	3
2.1	はじめに	3
2.2	STFT	3
2.3	NMF の概要	4
2.4	NMF における変数行列の最適化アルゴリズム	7
2.4.1	NMF の基本問題	7
2.4.2	二乗 Euclid 距離に基づく NMF	8
2.4.3	一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンスに基づく NMF	12
2.4.4	Itakura–Saito ダイバージェンスに基づく NMF	14
2.5	本章のまとめ	17
第 3 章	基底共有型 NMF	18
3.1	はじめに	18
3.2	動機	18
3.3	分解モデル	19
3.4	BSNMF における変数行列の最適化アルゴリズム	20
3.4.1	二乗 Euclid 距離に基づく BSNMF	21
3.4.2	一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンスに基づく BSNMF	23
3.4.3	Itakura–Saito ダイバージェンスに基づく BSNMF	25
3.5	アクティベーション非共有型 BSNMF	27
3.6	本章のまとめ	29
第 4 章	音響特徴量抽出実験	30
4.1	はじめに	30
4.2	実験条件	30
4.3	実験結果	31

4.4	本章のまとめ	37
第 5 章	音色変換への応用	38
5.1	はじめに	38
5.2	BSNMF に基づく楽器音信号の音色変換	38
5.3	スケールフィッティング	39
5.3.1	二乗 Euclid 距離に基づくスケールフィッティング	40
5.3.2	一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンスに基づくスケールフィッ ティング	41
5.3.3	Itakura–Saito ダイバージェンスに基づくスケールフィッティング	43
5.4	実験条件	44
5.5	実験結果	47
5.6	本章のまとめ	48
第 6 章	結言	52
	謝辞	53
	参考文献	54
付録 A	補助関数法で利用される不等式	57
A.1	接線不等式	57
A.2	Jensen の不等式	57

第1章

緒言

1.1 本論文の背景

一般的に、個人の演奏や楽器本体の芸術的価値は、一定の品質を超える範囲において、評価者の主観に基づいて評価される。例えば、Fig. 1.1 に示すように「アマチュア奏者とプロフェッショナル奏者の演奏の差異」や「安価な楽器と高価な楽器の奏でる音の違い」が主観的に語られることは多い。しかしながら、これらの観点について主観を廃して定量的に議論する方法はあまり確立されておらず、とくに音楽演奏や楽器に対して精通していない者にとっては、芸術的価値を判断する材料がないため他者の主観的評価に頼らざるを得ない。もし、複数の楽器音信号の音響的違いや芸術的違いを客観的かつ定量的に表現・評価する音響特徴量が推定できるならば、アマチュア奏者がより良い演奏をするために必要な技術の提示や、より芸術的価値の高い楽器の設計製作等に役立てることができる。さらに、そのような音響特徴量は、楽器音信号の音色変換、識別、検索等にも応用することが可能と考えられ、音楽という万人が親しむ芸術文化のさらなる興隆につながることを予想される。

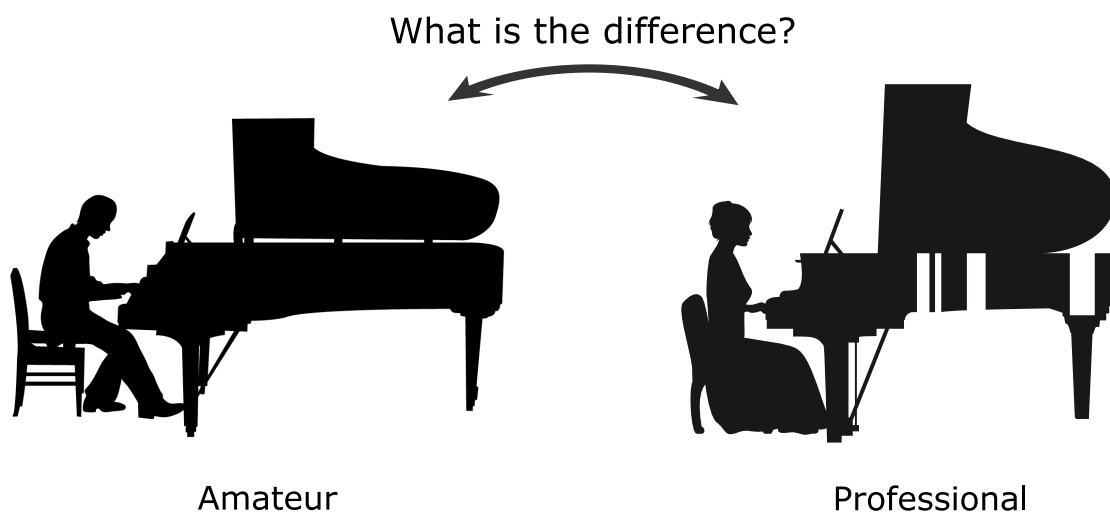


Fig. 1.1. Differences between amateur and professional performances.

2 第1章 緒言

音響信号の特徴量解析法は、音声解析を起源として古くから研究されており、ピッチ、スペクトル包絡、メル周波数ケプストラム係数 [1] 等様々な特徴量が広く利用されている。楽器音の物理現象を対象とした解析も歴史は古く、ピアノやヴァイオリン等、個々の楽器の物理音響的側面から発音機構が解析されてきた [2]。2000 年以降では、楽器同定の分野で楽器音の音響特徴量が各種検討されている [3, 4]。

1.2 本論文の目的

本論文では、客観的かつ定量的に複数の楽器音信号の違いを議論できる音響特徴量抽出法を検討する。具体的には、非負値行列因子分解 (nonnegative matrix factorization: NMF) [5, 6] と呼ばれる行列分解理論を用いて、複数の楽器音信号間の「共通する音響特徴量」及び「固有の音響特徴量」を同時に推定・抽出する新しいアルゴリズムを提案し、その有用性を実験的に調査する。さらに、その応用の一例として複数の楽器音信号の音色変換を実際に行い、主観評価によってその精度について調査する。

1.3 本論文の構成

2 章では、NMF [5, 6] 及び関連の深い各種既存手法について述べる。3 章では、NMF に基づく提案手法について述べる。4 章では、提案手法を用いた音響特徴量抽出実験について述べる。5 章では、提案手法の応用の一例として複数の楽器音信号の音色変換実験について述べる。6 章では、本論文の結論を述べる。

第 2 章

音の時間周波数表現と NMF

2.1 はじめに

本章では、音響信号に対する NMF [5, 6] の適用について説明する。2.2 節では、短時間フーリエ変換 (short-time Fourier transform: STFT) について、2.3 節では、NMF の概要について説明する。2.4 節では、NMF における変数行列の最適化について述べる。2.5 節で、本章についてまとめる。

2.2 STFT

STFT は、Fig. 2.1 に示すような時間的に変化するスペクトルを表現するための手法である。STFT の分析窓関数の長さ及びシフト長をそれぞれ Q 及び τ としたとき、時間領域の信

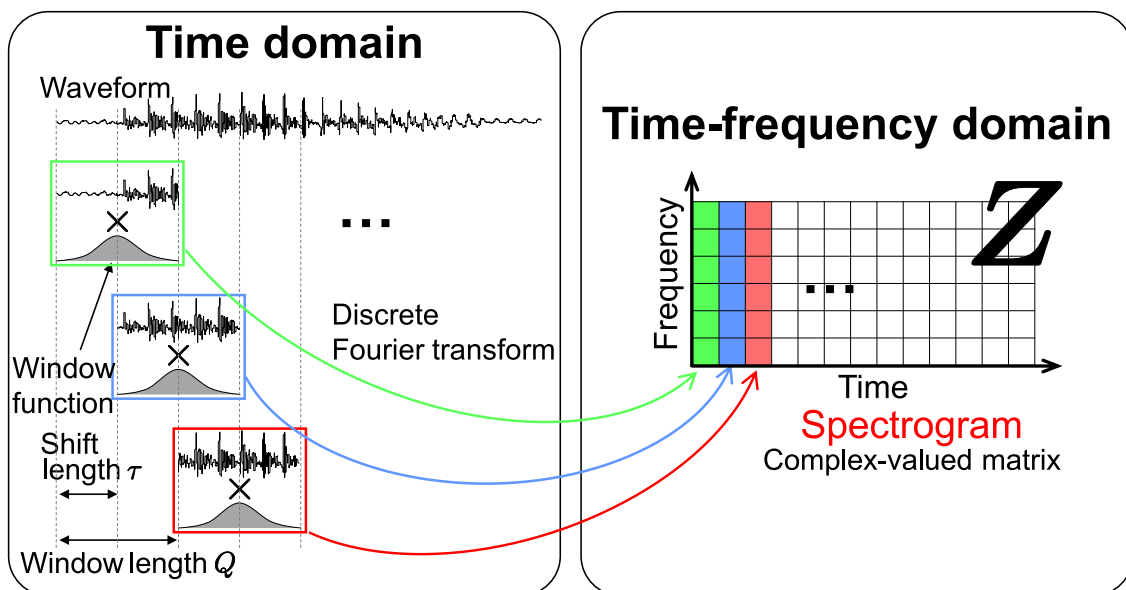


Fig. 2.1. Mechanism of STFT.

号 $z(l)$ の j 番目の短時間区間（時間フレーム）の信号は次式で表される。

$$\begin{aligned} z^{(j)} &= [z((j-1)\tau+1), z((j-1)\tau+2), \dots, z((j-1)\tau+Q)]^T \\ &= [z^{(j)}(1), z^{(j)}(2), \dots, z^{(j)}(q), \dots, z^{(j)}(Q)]^T \in \mathbb{R}^Q \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで、 \cdot^T は転置を表し、 $j = 1, 2, \dots, J$ 及び $q = 1, 2, \dots, Q$ は、それぞれ時間フレーム及び時間フレーム内のサンプルのインデクスを示す。また、セグメント数 J は次式によって与えられる。

$$J = \frac{L}{\tau} \quad (2.2)$$

式 (2.1) で定義される時間フレームの信号を全ての j についてまとめた全時間フレームの信号を $\mathbf{z} = [z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(J)}] \in \mathbb{R}^{Q \times J}$ と表記すると、STFT の処理は次式のように表される。

$$\mathbf{Z} = \text{STFT}_{\omega}(\mathbf{z}) \in \mathbb{C}^{I \times J} \quad (2.3)$$

ここで、 $\omega = [\omega(1), \omega(2), \dots, \omega(Q)]^T \in \mathbb{R}^Q$ は STFT で用いる窓関数である。スペクトログラム \mathbf{Z} の (i, j) 番目の要素は次式で表される。

$$z_{ij} = \sum_{q=1}^Q \omega(q) z^{(j)}(q) \exp \left\{ \frac{-\iota 2\pi (q-1)(i-1)}{F} \right\} \quad (2.4)$$

ここで F は $\lfloor \frac{F}{2} \rfloor + 1 = I$ を満たす整数 ($\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数) を、 $i = 1, 2, \dots, I$ は周波数ビンのインデクスを、 ι は虚数単位を示している。このように、時間領域の信号は一定幅の短時間ごとに分析窓関数を乗じて離散フーリエ変換を行うことで、横軸が時間、縦軸が周波数のスペクトログラムと呼ばれる複素行列 \mathbf{Z} で表すことができる。Figs. 2.2 及び 2.3 にはそれぞれ音楽信号及び音声信号のパワースペクトログラムの例を示している。ここで、パワースペクトログラムとは、式 (2.3) で求めた複素スペクトログラム \mathbf{Z} の要素ごとの絶対値の 2 乗をとったものである。色の変化は青色に近づくほどパワー値が小さく、黄色に近づくほどパワー値が大きいことを示している。

2.3 NMF の概要

NMF [5, 6] とは、1999 年に D. D. Lee と H. S. Seung によって提案された行列の分解アルゴリズムである。行列の分解は、線形方程式を解くための LU 分解や QR 分解、ベクトル空間の概念に基づく固有値分解や特異値分解等が代表的であるが、NMF がこれらの行列分解手法と大きく異なるのは、その名の通り非負値行列を分解対象としている点である。非負値行列とは、「全ての要素が 0 以上 (0 又は正值)」という制約を持つ一般行列である。音響信号においては、STFT を用いて時間信号 (1 次元データ) を時間周波数信号 (2 次元データ) に変換することで複素行列 (全ての要素が複素数の行列) が得られ、その各要素の振幅値やパワー値を取った行列を定義すれば、Fig. 2.4 のように非負値行列が得られる。

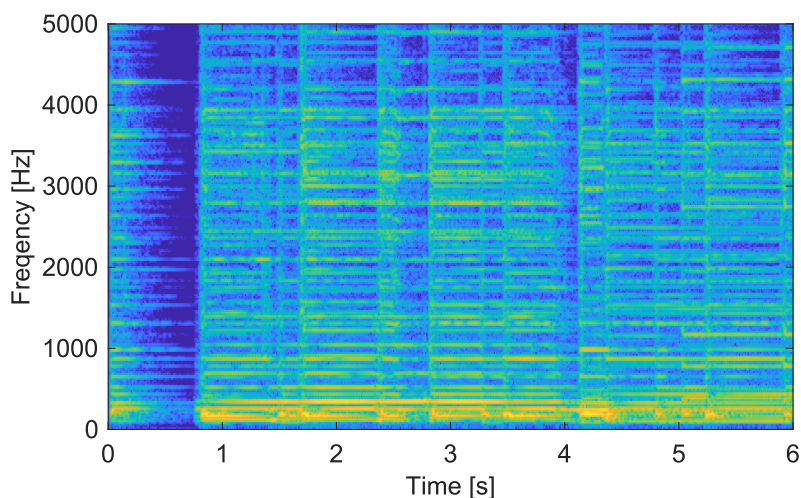


Fig. 2.2. Power spectrogram of music signal.

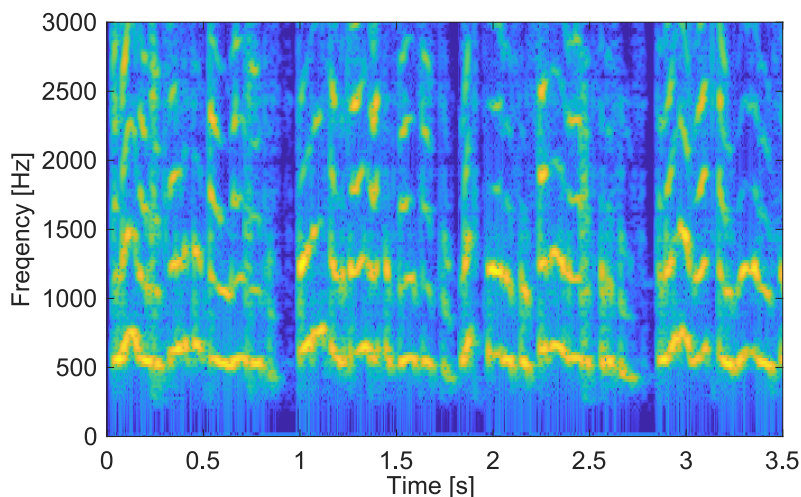


Fig. 2.3. Power spectrogram of speech signal.

NMF は、次式に示すように、非負の観測行列を別の二つの非負行列の行列積に近似的に分解する数値アルゴリズムである。

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{W}\mathbf{H} \quad (2.5)$$

ここで、 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times J}$ は全要素が非負の観測行列であり、 $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \cdots \ \mathbf{w}_K] \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times K}$ 及び $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1 \ \mathbf{h}_2 \ \cdots \ \mathbf{h}_K]^T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{K \times J}$ は NMF で推定すべき非負変数行列である。 \mathbf{W} 及び \mathbf{H} はそれぞれ基底行列及びアクティベーション行列と呼ばれる。 \mathbf{W} の列ベクトルである \mathbf{w}_k は基底ベクトルと呼ばれ、その本数 K は $K \ll \min(I, J)$ となるように設定される。ここで、 $k = 1, 2, \dots, K$ は基底ベクトルのインデックスを示す。行列 $\mathbf{W}\mathbf{H}$ のランクは基底ベクトルの本数 K が最大であるため、NMF は \mathbf{X} を $\mathbf{W}\mathbf{H}$ で低ランク近似する行列分解である。従って、 \mathbf{X} 中に頻出する少数 (K 個) の潜在的なパターンを基底ベクトルとして抽出できる教師無し学習である。

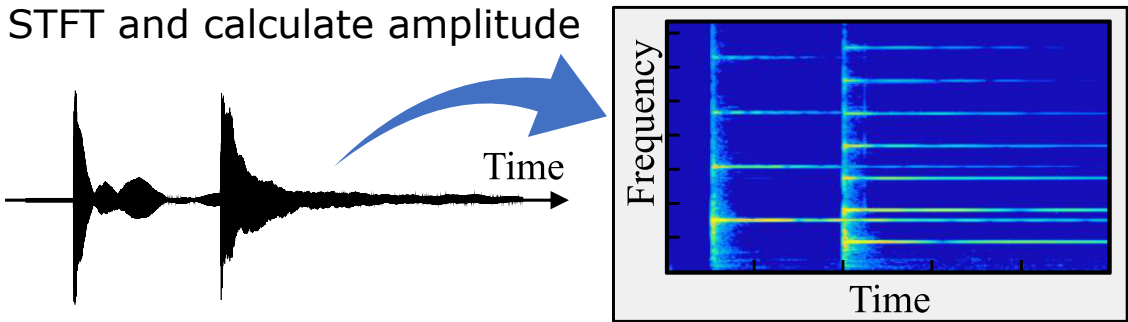


Fig. 2.4. Obtain nonnegative matrix from acoustic signal via STFT.

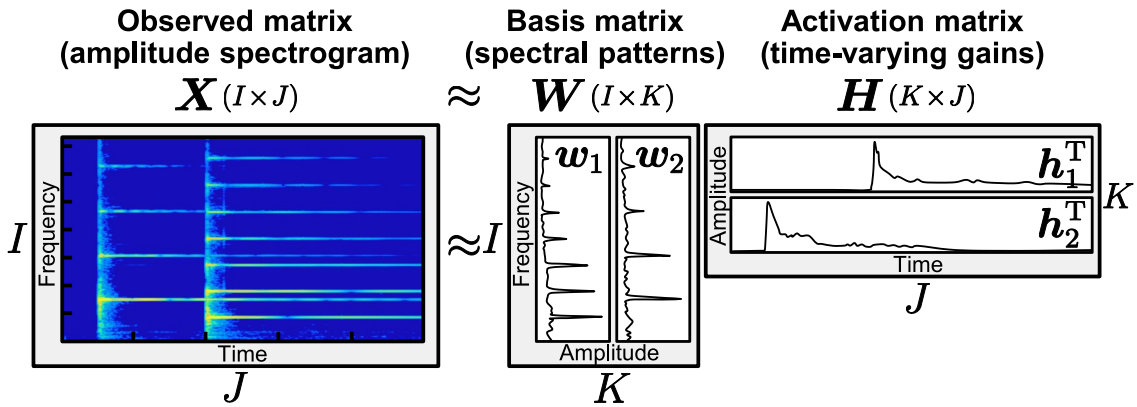


Fig. 2.5. NMF for audio signals, where $K = 2$.

NMF を音響信号に適用する場合、STFT を経て得られる振幅（又はパワー）スペクトログラムを非負観測行列 X とするのが一般的である。この場合、Fig. 2.5 に示すように、音響信号中の頻出スペクトルが w_k として得られ、さらに各スペクトルの時間的強度変化が h_k となる。このように、NMF は音響信号中のスペクトルパターンを教師無し学習できるため、音楽信号解析 [7] や音源分離 [8, 9] 等に頻繁に適用される。

注意すべき点として、NMF で得られる W と H には原理的に次の 2 つの任意性が存在する。

- 順序の任意性 (permutation ambiguity)

W に含まれる K 本の基底ベクトル w_1, w_2, \dots, w_K の順序を入れ替えても、 H に含まれる係数ベクトル h_1, h_2, \dots, h_K を同様の順序に入れ替えれば、 WH は一致する。

$$\text{例: } (w_1 \ w_2) \begin{pmatrix} h_1^T \\ h_2^T \end{pmatrix} = (w_2 \ w_1) \begin{pmatrix} h_2^T \\ h_1^T \end{pmatrix}$$

- 大きさの任意性 (scale ambiguity)

W に含まれる K 本の基底ベクトル w_1, w_2, \dots, w_K のそれぞれに対して C_1, C_2, \dots, C_K というスカラーを乗じても、 H に含まれる係数ベクトル h_1, h_2, \dots, h_K

のそれぞれに対して $C_1^{-1}, C_2^{-1}, \dots, C_K^{-1}$ を乗じれば, \mathbf{WH} は一致する.

$$\text{例: } (\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2) \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \end{pmatrix} = (C_1 \mathbf{w}_1 \quad C_2 \mathbf{w}_2) \begin{pmatrix} C_1^{-1} \mathbf{h}_1^T \\ C_2^{-1} \mathbf{h}_2^T \end{pmatrix}$$

また, \mathbf{W} 及び \mathbf{H} の推定問題は解析的に解けるわけではなく, 次節で説明する最適化問題を解く必要がある. さらに, 定義する最適化問題によっては目的関数が凸関数にならないため, 局所解の存在により必ずしも常に同じ分解結果が得られなくなる.

2.4 NMF における変数行列の最適化アルゴリズム

2.4.1 NMF の基本問題

NMF では, 次式の最適化問題を解くことで変数行列 \mathbf{W} 及び \mathbf{H} を推定する.

$$\min_{\mathbf{W}, \mathbf{H}} \mathcal{D}(\mathbf{X} | \mathbf{WH}) \text{ s.t. } w_{ik}, h_{kj} \geq 0 \quad \forall i, j, k \quad (2.6)$$

ここで, w_{ik} 及び h_{kj} はそれぞれ \mathbf{W} 及び \mathbf{H} の要素であり. $i = 1, 2, \dots, I$ 及び $j = 1, 2, \dots, J$ はそれぞれ周波数ビン及び時間フレームのインデックスを示す. また, $\mathcal{D}(\cdot | \cdot)$ は 2 つの入力行列間の乖離度を測る関数である. 本論文では, 以下で表される二乗 Euclid 距離 (\mathcal{D}_{Eu}), 一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンス (\mathcal{D}_{KL}), 板倉斎藤擬距離 (\mathcal{D}_{IS}) を用いる.

- 二乗 Euclid 距離 (squared Euclidean distance)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{Eu}}(\mathbf{A} | \mathbf{B}) &= \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_{\text{Fr}}^2 \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (a_{ij} - b_{ij})^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

- 一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンス (generalized Kullback–Leibler divergence)

$$\mathcal{D}_{\text{KL}}(\mathbf{A} | \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[a_{ij} \log \frac{a_{ij}}{b_{ij}} - (a_{ij} - b_{ij}) \right] \quad (2.8)$$

- Itakura–Saito ダイバージェンス (Itakura–Saito divergence)

$$\mathcal{D}_{\text{IS}}(\mathbf{A} | \mathbf{B}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{a_{ij}}{b_{ij}} - \log \frac{a_{ij}}{b_{ij}} - 1 \right) \quad (2.9)$$

ここで, a_{ij} 及び b_{ij} はそれぞれ $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ 及び $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{I \times J}$ の要素を表す. また, $\|\cdot\|_{\text{Fr}}^2$ は Frobenius ノルムであり, 次式で与えられる.

$$\|\mathbf{A}\|_{\text{Fr}} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{AA}^T)} \quad (2.10)$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J |a_{ij}|^2} \quad (2.11)$$

さらに、 $\text{tr}(\cdot)$ は正方行列の跡 (trace) であり、実数正方行列を $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{I \times I}$ 、その要素を q_{ij} と定義したとき、次式で与えられる。

$$\text{tr}(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^I q_{ii} \quad (2.12)$$

次項では、上記の3つの乖離度関数を式 (2.6) の $\mathcal{D}(\cdot|\cdot)$ に用いた場合の NMF の反復最適化更新式を求める。この際、接線不等式と Jensen の不等式 (付録 A.1 及び A.2 を参照) を用いる。また、本論文では NMF の反復更新式の導出に補助関数法 (英語文献では majorization-minimization algorithm) [6, 10, 11, 12] と呼ばれる最適化アルゴリズムを用いる。

2.4.2 二乗 Euclid 距離に基づく NMF

まず、二乗 Euclid 距離に基づく NMF (Eu-NMF) の最適化問題は式 (2.7) より、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{W}, \mathbf{H}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(x_{ij} - \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[x_{ij}^2 - 2x_{ij} \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} + \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

式 (2.13) の目的関数の w_{ik} や h_{kj} に関する偏微分を計算する場合、第3項 (k に関する総和を含む2次関数) の偏微分が原因で \mathbf{W} や \mathbf{H} の停留点を求めることができない。そこで、Jensen の不等式を適用し、式 (2.13) を上から抑える補助関数を設計することを考える。式 (2.13) の第3項に対して、次の不等式を考える。

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} \right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} \frac{w_{ik} h_{kj}}{\delta_{ijk}} \right)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^K \delta_{ijk} \left(\frac{w_{ik} h_{kj}}{\delta_{ijk}} \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{w_{ik}^2 h_{kj}^2}{\delta_{ijk}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここで、 $\delta_{ijk} > 0$ は補助変数であり、 $\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} = 1$ を満たす。式 (2.14) は、Jensen の不等式において、凸関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(\cdot) = (\cdot)^2$ として適用した不等式である。この不等式を式 (2.13) の第3項に適用することで、補助関数 $\mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \mathbf{\Delta})$ を次式のように定義できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{W}, \mathbf{H}) &\leq \mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \mathbf{\Delta}) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(x_{ij}^2 - 2x_{ij} \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} + \sum_{k=1}^K \frac{w_{ik}^2 h_{kj}^2}{\delta_{ijk}} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

ここで、 $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}^{I \times J \times K}$ は補助変数 δ_{ijk} を要素として含む 3 階のテンソルである。

次に、設計した補助関数 $\mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \Delta)$ を補助変数 Δ について最小化する。いま、補助変数には等式制約条件 $\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} = 1$ が課せられているため、次の等式制約条件付き最適化問題を考える。

$$\min_{\Delta} \mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \Delta) \quad \text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^K \delta_{ijk} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J \quad (2.16)$$

最適化問題 (2.16) の Lagrange 関数は

$$\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \Delta, \lambda) = \mathcal{J}^+ - \lambda \left(\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} - 1 \right) \quad (2.17)$$

で与えられるため、 δ_{ijk} 及び λ の偏微分をそれぞれ 0 とおくと

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta_{ijk}} = -\frac{w_{ik}^2 h_{kj}^2}{\delta_{ijk}^2} - \lambda = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} + 1 = 0 \quad (2.19)$$

が得られる。式 (2.19) は等式制約条件 $\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} = 1$ そのものである。また、式 (2.18)、 $\delta_{ijk} > 0$ 、及び $w_{ik}, h_{kj} \geq 0$ より

$$\begin{aligned} \delta_{ijk} &= \sqrt{-\frac{w_{ik}^2 h_{kj}^2}{\lambda}} \\ &= \frac{w_{ik} h_{kj}}{\sqrt{-\lambda}} \end{aligned} \quad (2.20)$$

が得られる。式 (2.20) の両辺に対して k について総和をとると

$$\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} = \sum_{k=1}^K \frac{w_{ik} h_{kj}}{\sqrt{-\lambda}} \quad (2.21)$$

となり、等式制約条件 $\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} = 1$ より

$$\sum_{k=1}^K \frac{w_{ik} h_{kj}}{\sqrt{-\lambda}} = 1 \quad (2.22)$$

が得られる。未定乗数 λ は k に依らない定数であるため、結局

$$\sqrt{-\lambda} = \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} \quad (2.23)$$

となり、これを式 (2.20) に代入することで、補助変数の最小解が次式として得られる。

$$\delta_{ijk} = \frac{w_{ik} h_{kj}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'} h_{k'j}} \quad (2.24)$$

ここで、式 (2.24) の左辺及び分子の k と分母の k は互いに無関係であるため、これらを区別するために分母のインデクス k を k' と記述している。従って、式 (2.24) が補助関数 (2.16) の補助変数に関する最小解を与える。今、変数の更新の反復回数を t とし、各変数の上付き文字として表示すると、次のようになる。

$$\delta_{ijk}^{(t+1)} = \frac{w_{ik}^{(t)} h_{kj}^{(t)}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}} \quad (2.25)$$

なお、最小解の式 (2.24) は不等式 (2.14) の等号成立条件に他ならない。Jensen の不等式における等号成立条件は、Lagrange 関数 (2.17) を定義して偏微分を計算しなくとも、直ちに

$$\frac{w_{i1} h_{1j}}{\delta_{ij1}} = \frac{w_{i2} h_{2j}}{\delta_{ij2}} = \dots = \frac{w_{iK} h_{Kj}}{\delta_{ijK}} = \text{const.} \quad (2.26)$$

という条件式が導かれ、式 (2.20) の右辺の $\sqrt{-\lambda}$ を式 (2.26) の右辺の定数 const. とした式が得られることから、補助変数の最小解 (2.24) をより簡単に導くことができる。

続いて、設計した補助関数 $\mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \Delta)$ を本来の変数 \mathbf{W} 及び \mathbf{H} について最小化する。まず、補助関数 (2.15) を w_{ik} で偏微分して 0 とおくと、次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathcal{J}^+}{\partial w_{ik}} = \sum_{j=1}^J \left(-2x_{ij} h_{kj} + 2 \frac{w_{ik} h_{kj}^2}{\delta_{ijk}} \right) = 0 \quad (2.27)$$

式 (2.27) を整理すると次式のようなになる*1。

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^J x_{ij} h_{kj} + \sum_{j=1}^J \frac{w_{ik} h_{kj}^2}{\delta_{ijk}} &= 0 \\ w_{ik} \sum_{j=1}^J \frac{h_{kj}^2}{\delta_{ijk}} &= \sum_{j=1}^J x_{ij} h_{kj} \\ w_{ik} &= \frac{\sum_{j=1}^J x_{ij} h_{kj}}{\sum_{j=1}^J \frac{h_{kj}^2}{\delta_{ijk}}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

式 (2.28) が補助関数 (2.15) を最小化する w_{ik} である。反復回数 t を考慮して記述すると、次のようになる。

$$w_{ik}^{(t+1)} = \frac{\sum_{j=1}^J x_{ij} h_{kj}^{(t)}}{\sum_{j=1}^J \frac{h_{kj}^{(t)2}}{\delta_{ijk}^{(t+1)}}} \quad (2.29)$$

*1 今は補助関数を w_{ik} で偏微分しているため、偏微分を 0 とおいた式中の w_{ik} は新しい (更新後の) 変数であり、偏微分定数である h_{kj} や δ_{ijk} は古い (更新前の) 変数である点に注意する。従って、ここでは新しい変数 w_{ik} について解いた式が w_{ik} の反復更新式となる。

同様に、補助関数 (2.15) を h_{kj} で偏微分して 0 とおくと、 h_{kj} の最小解も次のように得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{J}^+}{\partial h_{kj}} &= \sum_{i=1}^I \left(-2x_{ij}w_{ik} + 2\frac{w_{ik}^2 h_{kj}}{\delta_{ijk}} \right) = 0 \\ &= -\sum_{i=1}^I x_{ij}w_{ik} + \sum_{i=1}^I \frac{w_{ik}^2 h_{kj}}{\delta_{ijk}} = 0 \\ &= h_{kj} \sum_{i=1}^I \frac{w_{ik}^2}{\delta_{ijk}} = \sum_{i=1}^I x_{ij}w_{ik} \\ &= h_{kj} = \frac{\sum_{i=1}^I x_{ij}w_{ik}}{\sum_{i=1}^I \frac{w_{ik}^2}{\delta_{ijk}}} \end{aligned} \quad (2.30)$$

反復回数 t を考慮して記述すると、次のようになる。

$$h_{kj}^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^I x_{ij}w_{ik}^{(t)}}{\sum_{i=1}^I \frac{w_{ik}^{(t)2}}{\delta_{ijk}^{(t+1)}}} \quad (2.31)$$

従って、式 (2.25) で補助変数を更新し、式 (2.29) 及び (2.31) で本来の変数を更新する。この 2 つの手順を繰り返すことで、目的関数 (2.13) の値を最小化する \mathbf{W} 及び \mathbf{H} を求めることができる。ここで、補助変数の反復更新式 (2.25) が解析的に記述できることから、式 (2.25) を式 (2.29) 及び (2.31) にそれぞれ代入することで、次式のような統合された反復更新式に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} w_{ik}^{(t+1)} &= \frac{\sum_{j=1}^J x_{ij}h_{kj}^{(t)}}{\sum_{j=1}^J h_{kj}^{(t)2} \frac{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}{w_{ik}^{(t)} h_{kj}^{(t)}}} \\ &= w_{ik}^{(t)} \frac{\sum_{j=1}^J x_{ij}h_{kj}^{(t)}}{\sum_{j=1}^J h_{kj}^{(t)} \sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} h_{kj}^{(t+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^I x_{ij}w_{ik}^{(t)}}{\sum_{i=1}^I w_{ik}^{(t)2} \frac{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}{w_{ik}^{(t)} h_{kj}^{(t)}}} \\ &= h_{kj}^{(t)} \frac{\sum_{i=1}^I x_{ij}w_{ik}^{(t)}}{\sum_{i=1}^I w_{ik}^{(t)} \sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}} \end{aligned} \quad (2.33)$$

式 (2.32) 及び (2.33) は、次のように行列形式で表現することができる。

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \odot \frac{\mathbf{X}\mathbf{H}^T}{\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{H}^T} \quad (2.34)$$

$$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{H} \odot \frac{\mathbf{W}^T\mathbf{X}}{\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{H}} \quad (2.35)$$

ここで、反復回数 t の表記は省略し、変数更新を表す演算子 \leftarrow を用いている。また、行列間の演算 \odot 及び行列間の分数はそれぞれ要素毎の積及び商を表す。以上より、Eu-NMF の反復更新式が導出された。

2.4.3 一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンスに基づく NMF

一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンスに基づく NMF (KL-NMF) の最適化問題は式 (2.8) より、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}, \mathbf{H}} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[x_{ij} \log \frac{x_{ij}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj}} - \left(x_{ij} - \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} \right) \right] \\ \text{s.t. } w_{ik}, h_{kj} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J, k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2.36)$$

この目的関数を変形すると

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{W}, \mathbf{H}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[x_{ij} \log \frac{x_{ij}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj}} - \left(x_{ij} - \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(x_{ij} \log x_{ij} - x_{ij} \log \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} - x_{ij} + \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

となる。Eu-NMF の場合と同様に w_{ik} や h_{kj} で偏微分を考えた時、式 (2.37) 中で停留点が求められなくなる原因となる項は第 2 項の k に関する総和を含む負対数関数である。負対数関数は凸関数であることから、この項についても Jensen の不等式を用いることができる。

$$\begin{aligned} -\log \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} &= -\log \sum_{k=1}^K \delta_{ijk} \frac{w_{ik} h_{kj}}{\delta_{ijk}} \\ &\leq -\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} \log \frac{w_{ik} h_{kj}}{\delta_{ijk}} \end{aligned} \quad (2.38)$$

式 (2.14) と同様に、補助変数 $\delta_{ijk} > 0$ は $\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} = 1$ を満たす。式 (2.38) は、Jensen の不等式において、凸関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(\cdot) = -\log(\cdot)$ として適用した不等式である。この不等式を式 (2.37) の第 2 項に適用することで、補助関数を次式のように定義できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{W}, \mathbf{H}) &\leq \mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \Delta) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(x_{ij} \log x_{ij} - x_{ij} \sum_{k=1}^K \delta_{ijk} \log \frac{w_{ik} h_{kj}}{\delta_{ijk}} - x_{ij} + \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} \right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

まず、補助関数 $\mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \Delta)$ に対する補助変数 δ_{ijk} の最小化について考える。Eu-NMF の場合と同様に、 δ_{ijk} の最小解は不等式 (2.38) の等号成立条件から与えられるものである。不等式 (2.38) においても、補助変数が式 (2.26) を満たすときに等号が成立することから、同様の議論を経て式 (2.25) として補助変数 δ_{ijk} の反復更新式が得られることが分かる。

次に、補助関数 $\mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \Delta)$ に対する本来の変数 \mathbf{W} 及び \mathbf{H} の最小化について考える。まず、補助関数 (2.39) を w_{ik} で偏微分して 0 とおくと、次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathcal{J}^+}{\partial w_{ik}} = \sum_{j=1}^J \left(-x_{ij} \delta_{ijk} \frac{\delta_{ijk}}{w_{ik} h_{kj}} \frac{h_{kj}}{\delta_{ijk}} + h_{kj} \right) = 0 \quad (2.40)$$

式 (2.40) を整理すると次式のようになる.

$$\begin{aligned}
 -\sum_{j=1}^J x_{ij} \frac{\delta_{ijk}}{w_{ik}} + \sum_{j=1}^J h_{kj} &= 0 \\
 w_{ik} \sum_{j=1}^J h_{kj} &= \sum_{j=1}^J x_{ij} \delta_{ijk} \\
 w_{ik} &= \frac{\sum_{j=1}^J x_{ij} \delta_{ijk}}{\sum_{j=1}^J h_{kj}}
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

式 (2.41) が補助関数 (2.39) を最小化する w_{ik} である. 反復回数 t を考慮して記述すると, 次のようになる.

$$w_{ik}^{(t+1)} = \frac{\sum_{j=1}^J x_{ij} \delta_{ijk}^{(t+1)}}{\sum_{j=1}^J h_{kj}^{(t)}} \tag{2.42}$$

同様に, 補助関数 (2.39) を h_{kj} で偏微分して 0 とおくと, h_{kj} の最小解も次のように得られる.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{J}^+}{\partial h_{kj}} &= \sum_{i=1}^I \left(-x_{ij} \delta_{ijk} \frac{\delta_{ijk}}{w_{ik} h_{kj}} \frac{w_{ik}}{\delta_{ijk}} + w_{ik} \right) = 0 \\
 -\sum_{i=1}^I x_{ij} \frac{\delta_{ijk}}{h_{kj}} + \sum_{i=1}^I w_{ik} &= 0 \\
 h_{kj} \sum_{i=1}^I w_{ik} &= \sum_{i=1}^I x_{ij} \delta_{ijk} \\
 h_{kj} &= \frac{\sum_{i=1}^I x_{ij} \delta_{ijk}}{\sum_{i=1}^I w_{ik}}
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

反復回数 t を考慮して記述すると, 次のようになる.

$$h_{kj}^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^I x_{ij} \delta_{ijk}^{(t+1)}}{\sum_{i=1}^I w_{ik}^{(t)}} \tag{2.44}$$

従って, 式 (2.25) で補助変数を更新し, 式 (2.42) 及び (2.44) で本来の変数を更新する. この 2 つの手順を繰り返すことで, 目的関数 (2.37) の値を最小化する \mathbf{W} 及び \mathbf{H} を求めることができる. Eu-NMF の場合と同様に, 補助変数の反復更新式 (2.25) を式 (2.42) 及び (2.44)

にそれぞれ代入することで、次式のような統合された反復更新式に書き換えることができる。

$$\begin{aligned} w_{ik}^{(t+1)} &= \frac{\sum_{j=1}^J x_{ij} \frac{w_{ik}^{(t)} h_{kj}^{(t)}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}}{\sum_{j=1}^J h_{kj}^{(t)}} \\ &= w_{ik}^{(t)} \frac{\sum_{j=1}^J \frac{x_{ij}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}} h_{kj}^{(t)}}{\sum_{j=1}^J h_{kj}^{(t)}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} h_{kj}^{(t+1)} &= \frac{\sum_{i=1}^I x_{ij} \frac{w_{ik}^{(t)} h_{kj}^{(t)}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}}{\sum_{i=1}^I w_{ik}^{(t)}} \\ &= h_{kj}^{(t)} \frac{\sum_{i=1}^I \frac{x_{ij}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}} w_{ik}^{(t)}}{\sum_{j=1}^J w_{ik}^{(t)}} \end{aligned} \quad (2.46)$$

式 (2.45) 及び (2.46) は、次のように行列形式で表現することができる。

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \odot \frac{\mathbf{X} \mathbf{H}^T}{\mathbf{E} \mathbf{H}^T} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{H} \odot \frac{\mathbf{W}^T \mathbf{X}}{\mathbf{W}^T \mathbf{E}} \quad (2.48)$$

ここで、 $\mathbf{E} \in \{1\}^{I \times J}$ である。以上より、KL-NMF の反復更新式が導出された。

2.4.4 Itakura–Saito ダイバージェンスに基づく NMF

Itakura–Saito ダイバージェンスに基づく NMF (IS-NMF) の最適化問題は式 (2.9) より、次式のようになる。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}, \mathbf{H}} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{x_{ij}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj}} - \log \frac{x_{ij}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj}} - 1 \right) \\ \text{s.t. } w_{ik}, h_{kj} \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, I, j = 1, 2, \dots, J, k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad (2.49)$$

この目的関数を変形すると

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{W}, \mathbf{H}) &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{x_{ij}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj}} - \log \frac{x_{ij}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj}} - 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(\frac{x_{ij}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj}} - \log x_{ij} + \log \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.50)$$

となる。Eu-NMF の場合と同様に w_{ik} や h_{kj} で偏微分を考えた時、式 (2.50) 中で停留点が求められなくなる原因となる項は第 2 項及び第 3 項の k に関する総和を含む逆数関数及び対数

関数である。逆関数は凸関数であることから Jensen の不等式を適用できる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj}} &= \frac{1}{\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} \frac{w_{ik} h_{kj}}{\delta_{ijk}}} \\ &\leq \sum_{k=1}^K \delta_{ijk} \frac{\delta_{ijk}}{w_{ik} h_{kj}} \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\delta_{ijk}^2}{w_{ik} h_{kj}} \end{aligned} \quad (2.51)$$

式 (2.14) と同様に、補助変数 $\delta_{ijk} > 0$ は $\sum_{k=1}^K \delta_{ijk} = 1$ を満たす。式 (2.51) は、Jensen の不等式において、凸関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(\cdot) = (\cdot)^{-1}$ として適用した不等式である。また、対数関数は凹関数であることから接線不等式を適用することができる。

$$\begin{aligned} \log \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} &\leq \frac{1}{\omega_{ij}} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} - \omega_{ij} \right) + \log \omega_{ij} \\ &= \frac{1}{\omega_{ij}} \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} - 1 + \log \omega_{ij} \end{aligned} \quad (2.52)$$

ここで、 $\omega_{ij} > 0$ は補助変数である。不等式 (2.51) 及び (2.52) を式 (2.50) の第 2 項及び第 3 項にそれぞれ適用することで、補助関数を次式のように定義できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{W}, \mathbf{H}) &\leq \mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Omega}) \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left(x_{ij} \sum_{k=1}^K \frac{\delta_{ijk}^2}{w_{ik} h_{kj}} - \log x_{ij} + \frac{1}{\omega_{ij}} \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} - 1 + \log \omega_{ij} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

ここで、 $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}_{>0}^{I \times J}$ は補助変数 ω_{ij} を要素として含む行列である。

まず、補助関数 $\mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Omega})$ に対する補助変数 δ_{ijk} 及び ω_{ij} の最小化について考える。Eu-NMF の場合と同様に、 δ_{ijk} の最小解は不等式 (2.51) の等号成立条件から与えられるものである。不等式 (2.51) においても、補助変数が式 (2.26) を満たすときに等号が成立することから、同様の議論を経て式 (2.25) として補助変数 δ_{ijk} の反復更新式が得られることが分かる。また、 ω_{ij} の最小解は、やはり不等式 (2.52) の等号成立条件から得られる。接線不等式の等号成立条件より、補助変数の反復更新式は次式となる。

$$\omega_{ij} = \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj} \quad (2.54)$$

次に、補助関数 $\mathcal{J}^+(\mathbf{W}, \mathbf{H}, \mathbf{\Delta}, \mathbf{\Omega})$ に対する本来の変数 \mathbf{W} 及び \mathbf{H} の最小化について考える。まず、補助関数 (2.53) を w_{ik} で偏微分して 0 とおくと、次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathcal{J}^+}{\partial w_{ik}} = \sum_{j=1}^J \left(-x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^2}{w_{ik}^2 h_{kj}} + \frac{h_{kj}}{\omega_{ij}} \right) = 0 \quad (2.55)$$

式 (2.55) を整理すると次式のようにになる.

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^J x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^2}{w_{ik}^2 h_{kj}} + \sum_{j=1}^J \frac{h_{kj}}{\omega_{ij}} &= 0 \\
w_{ik}^2 \sum_{j=1}^J \frac{h_{kj}}{\omega_{ij}} &= \sum_{j=1}^J x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^2}{h_{kj}} \\
w_{ik} &= \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^2}{h_{kj}}}{\sum_{j=1}^J \frac{h_{kj}}{\omega_{ij}}}} \quad (2.56)
\end{aligned}$$

式 (2.56) が補助関数 (2.53) を最小化する w_{ik} である. 反復回数 t を考慮して記述すると, 次のようになる.

$$w_{ik}^{(t+1)} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^{(t+1)2}}{h_{kj}^{(t)}}}{\sum_{j=1}^J \frac{h_{kj}^{(t)}}{\omega_{ij}^{(t+1)}}}} \quad (2.57)$$

同様に, 補助関数 (2.53) を h_{kj} で偏微分して 0 とおくと, h_{kj} の最小解も次のように得られる.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{J}^+}{\partial h_{kj}} &= \sum_{i=1}^I \left(-x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^2}{w_{ik} h_{kj}^2} + \frac{w_{ik}}{\omega_{ij}} \right) = 0 \\
-\sum_{i=1}^I x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^2}{w_{ik} h_{kj}^2} + \sum_{i=1}^I \frac{w_{ik}}{\omega_{ij}} &= 0 \\
h_{kj}^2 \sum_{i=1}^I \frac{w_{ik}}{\omega_{ij}} &= \sum_{i=1}^I x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^2}{w_{ik}} \\
h_{kj} &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^2}{w_{ik}}}{\sum_{i=1}^I \frac{w_{ik}}{\omega_{ij}}}} \quad (2.58)
\end{aligned}$$

反復回数 t を考慮して記述すると, 次のようになる.

$$h_{kj}^{(t+1)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I x_{ij} \frac{\delta_{ijk}^{(t+1)2}}{w_{ik}^{(t)}}}{\sum_{i=1}^I \frac{w_{ik}^{(t)}}{\omega_{ij}^{(t+1)}}}} \quad (2.59)$$

従って, 式 (2.25) 及び (2.54) で補助変数を更新し, 式 (2.57) 及び (2.59) で本来の変数を更新する. この2つの手順を繰り返すことで, 目的関数 (2.50) の値を最小化する \mathbf{W} 及び \mathbf{H} を求めることができる. Eu-NMF 及び KL-NMF の場合と同様に, 補助変数の反復更新式 (2.25) 及び (2.54) を式 (2.57) 及び (2.59) にそれぞれ代入することで, 次式のような統合された反復

更新式に書き換えることができる。

$$\begin{aligned}
 w_{ik}^{(t+1)} &= \sqrt{\frac{\frac{w_{ik}^{(t)2} h_{kj}^{(t)2}}{\left(\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}\right)^2}}{\sum_{j=1}^J x_{ij} \frac{h_{kj}^{(t)}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}}}{\sum_{j=1}^J \frac{h_{kj}^{(t)}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}}} \\
 &= w_{ik}^{(t)} \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^J \frac{x_{ij}}{\left(\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}\right)^2} h_{kj}^{(t)}}{\sum_{j=1}^J \frac{h_{kj}^{(t)}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}}} \quad (2.60)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{kj}^{(t+1)} &= \sqrt{\frac{\frac{w_{ik}^{(t)2} h_{kj}^{(t)2}}{\left(\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}\right)^2}}{\sum_{i=1}^I x_{ij} \frac{w_{ik}^{(t)}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}}}{\sum_{i=1}^I \frac{w_{ik}^{(t)}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}}} \\
 &= h_{kj}^{(t)} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I \frac{x_{ij}}{\left(\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}\right)^2} w_{ik}^{(t)}}{\sum_{j=1}^J \frac{w_{ik}^{(t)}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j}^{(t)}}}} \quad (2.61)
 \end{aligned}$$

式 (2.60) 及び (2.61) は、次のように行列形式で表現することもできる。

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \odot \left[\frac{\frac{\mathbf{X}}{(\mathbf{W}\mathbf{H})^2} \mathbf{H}^\top}{\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{W}\mathbf{H}} \mathbf{H}^\top} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{H} \odot \left[\frac{\mathbf{W}^\top \frac{\mathbf{X}}{(\mathbf{W}\mathbf{H})^2}}{\mathbf{W}^\top \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{W}\mathbf{H}}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.63)$$

ここで、行列に対するドット付き指数乗は要素ごとの指数乗を表す。以上より、IS-NMF の反復更新式が導出された。

2.5 本章のまとめ

本章では、行列分解理論の一つである NMF について導入し、その反復更新式の導出について説明した。次章では、提案手法である基底共有型 NMF について説明し、導出について述べる。

第 3 章

基底共有型 NMF

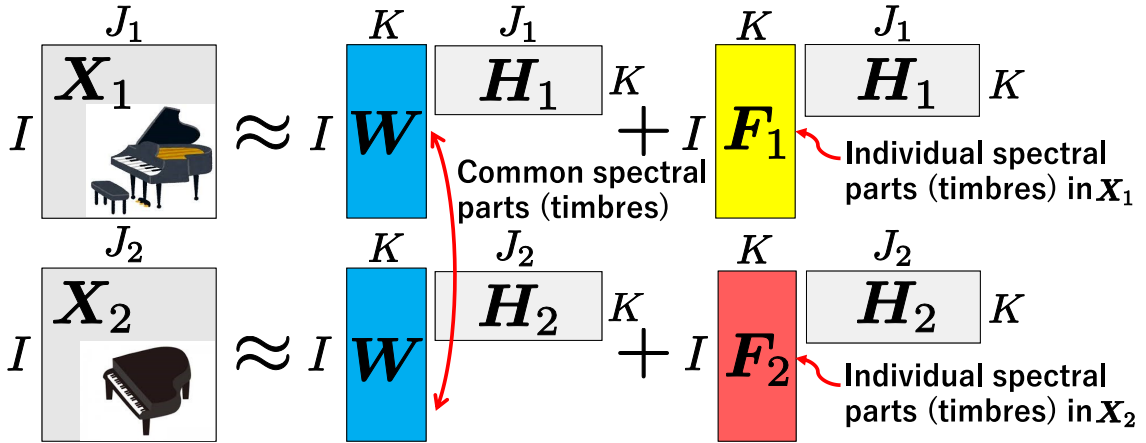
3.1 はじめに

本章では、提案手法である基底共有型 NMF (basis-shared NMF: BSNMF) についての説明及び最適化反復更新式の導出について述べる。まず、3.2 節にて BSNMF を提案する動機を述べる。3.3 節では BSNMF の分解モデルについて説明し、3.4 節では BSNMF の更新式を導出する。3.5 節ではアクティベーションを共有しない場合の BSNMF について更新式の導出をする。3.6 節で本章をまとめる。

3.2 動機

個人の演奏や楽器本体の芸術的価値などについて、定量的に議論する方法があまり確立されていない。もし、複数の楽器音信号の音響的違いや芸術的違いを客観的かつ定量的に表現・評価する音響特徴量が推定できるならば、アマチュア奏者がより良い演奏をするために必要な技術の提示や、より芸術的価値の高い楽器の設計製作などに役立てることができる。

本論文では、楽器間の差異を調査するため、NMF による教師なし学習を応用した BSNMF を新たに提案する。この BSNMF を用いて複数の楽器間の個体差や共通成分の抽出を行い、その成分について考察を加える。BSNMF に基づく複数楽器間の共通成分及び固有成分（個体差）の抽出原理を Fig. 3.1 に示す。ここでは、2つの楽器音信号 \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 に BSNMF を適用した例を示している。入力楽器音信号 \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 をそれぞれ $\mathbf{W}\mathbf{H}_1 + \mathbf{F}_1\mathbf{H}_1$ 及び $\mathbf{W}\mathbf{H}_2 + \mathbf{F}_2\mathbf{H}_2$ で低ランク近似分解する。これにより、基底行列 \mathbf{W} には \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 の楽器音に共通するスペクトル（音色パーツ）が抽出される。基底行列 \mathbf{F}_1 及び \mathbf{F}_2 には \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 の固有のスペクトルが現れ、これはすなわち 2つの楽器間の個体差を表現している。この手法では、複数の楽器音信号のモデル化に共有基底行列 \mathbf{W} を用いているほか、共有基底行列と固有基底行列のアクティベーション \mathbf{H}_1 及び \mathbf{H}_2 をさらに共有している。従って、 K 個の音色パーツのそれぞれに対して、共通・固有成分の抽出を行っていると解釈できる。3.5 節では、アクティベーションを共有化していない BSNMF の定式化についても提案している。こ

Fig. 3.1. Decomposition model in proposed BSNMF, where $N = 2$.

の場合音色パーツ単位での共通・固有成分の抽出ではなく、スペクトログラム全体としての共通・固有成分の抽出が可能となる。このようにして求めた音響特徴量は、楽器音信号の音色変換、識別、検索などにも応用することが可能と考えられ、音楽という万人が親しむ芸術文化のさらなる興隆につながる事が予想される。

なお、本論文では楽器音信号数が2個の場合を対象とするが、提案するBSNMFは任意の楽器音信号数に一般性を失うことなく拡張可能である。次節では、楽器音信号数を N 個に一般化し説明する。

3.3 分解モデル

提案手法では、複数の音響信号間の共通成分及び固有成分をBSNMFで推定する。いま、 N 個の観測信号の振幅スペクトログラムを $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots, X_N \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times J_n}$ ($n = 1, 2, \dots, N$ は観測信号のインデクス)と表すとき、次の低ランク近似分解モデルを考える。

$$\begin{cases} X_1 \approx WH_1 + F_1H_1 \\ X_2 \approx WH_2 + F_2H_2 \\ \vdots \\ X_N \approx WH_N + F_NH_N \end{cases} \quad (3.1)$$

ここで、 W は全観測信号のモデルで共有される基底行列であり、 X_1, \dots, X_N 間の共通スペクトル成分を含む。また、 X_n における固有スペクトル成分は、基底行列 $F_n = [f_{n1} \ f_{n2} \ \dots \ f_{nK}] \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times K}$ 及びアクティベーション行列 $H_n = [h_{n1} \ h_{n2} \ \dots \ h_{nK}]^T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{K \times J_n}$ の積 F_nH_n として表現されるため、式(3.1)の分解によって N 個の観測信号中の共通及び固有成分がそれぞれ推定できる。このとき、固有成分のアクティベーション行列 H_n を共有基底行列 W と固有基底行列 F_n の間で共有することで、 K 本の基底ベクトル(w_k 及び f_k)のそれぞれに対する共通・固有成分への分解を実現している。なお、式(3.1)のNMFは振幅スペクトログラムの分解であるため、式(3.1)の分解で得られる各モデルスペクトログラ

△ $\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n$ を逆 STFT で時間波形に戻す際には、位相スペクトログラムを付与して複素スペクトログラムを復元する必要がある。本論文では、位相スペクトログラムの推定は行わず、観測振幅スペクトログラム \mathbf{X}_n に対応する位相スペクトログラムをそのままモデルスペクトログラムに付与し、逆 STFT を適用する。より高精度な時間波形の復元には、位相復元手法 [13, 14, 15, 16] を適用することが望ましい。

3.4 BSNMF における変数行列の最適化アルゴリズム

式 (3.1) の分解モデルの各変数は、次の最適化問題を解くことで推定できる。

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}, \mathbf{F}_1, \dots, \mathbf{F}_N, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_N} \sum_{n=1}^N \mathcal{D}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n) \\ \text{s.t. } w_{ik}, f_{ikn}, h_{kj_n n} \geq 0 \quad \forall i, j_n, k, n \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここで、 $j_n = 1, 2, \dots, J_n$ は \mathbf{X}_n の時間フレームのインデックスを示す。式 (3.2) に対し、各乖離度関数を用いた式を以下に示す。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \mathcal{D}_{\text{Eu}}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \|\mathbf{X}_n - (\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n)\|_{\text{Fr}}^2 \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ij_n n} - \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \mathcal{D}_{\text{KL}}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ij_n n} \log x_{ij_n n} - x_{ij_n n} \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) \right. \\ & \quad \left. - x_{ij_n n} + \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \mathcal{D}_{\text{IS}}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[\frac{x_{ij_n n}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n}} - \log x_{ij_n n} \right. \\ & \quad \left. + \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$

以後、これらの最適化を解くための反復更新式を導出する。これらの反復更新式の導出には、通常の NMF と同様に補助関数法を用いる。

3.4.1 二乗 Euclid 距離に基づく BSNMF

式 (3.3) は次のように変形することができる.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} &\equiv \sum_{n=1}^N \mathcal{D}_{\text{Eu}}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W} \mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n \mathbf{H}_n) \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ij_n n} - \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) \right]^2 \\
 &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ij_n n}^2 + \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2x_{ij_n n} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) \right]
 \end{aligned}$$

上式の第 2 項について Jensen の不等式を適用する.

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\alpha_{ij_n kn}} + \sum_{k=1}^K \beta_{ij_n kn} \frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\beta_{ij_n kn}} \right)^2 \\
 &\leq \sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} \left(\frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\alpha_{ij_n kn}} \right)^2 + \sum_{k=1}^K \beta_{ij_n kn} \left(\frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\beta_{ij_n kn}} \right)^2 \\
 &= \sum_{k=1}^K \frac{w_{ik}^2 h_{kj_n n}^2}{\alpha_{ij_n kn}} + \sum_{k=1}^K \frac{f_{ikn}^2 h_{kj_n n}^2}{\beta_{ij_n kn}}
 \end{aligned}$$

ここで, $\alpha_{ij_n kn} > 0$ 及び $\beta_{ij_n kn} > 0$ は $\sum_k \alpha_{ij_n kn} + \sum_k \beta_{ij_n kn} = 1$ を満たす補助変数である. 上式の等号条件を次に示す.

$$\alpha_{ij_n kn} = \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n} h_{k'j_n n}} \quad (3.6)$$

$$\beta_{ij_n kn} = \frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n} h_{k'j_n n}} \quad (3.7)$$

従って, $\mathcal{J} \leq \mathcal{J}^+$ なる補助関数 \mathcal{J}^+ が次式として設計できる.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ij_n n}^2 + \sum_{k=1}^K \frac{w_{ik}^2 h_{kj_n n}^2}{\alpha_{ij_n kn}} + \sum_{k=1}^K \frac{f_{ikn}^2 h_{kj_n n}^2}{\beta_{ij_n kn}} \right. \\
 &\quad \left. - 2x_{ij_n n} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) \right] \\
 &\equiv \mathcal{J}^+
 \end{aligned}$$

$\partial \mathcal{J}^+ / \partial w_{ik} = 0$ より, \mathbf{W} の更新式が得られる.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} \left(2 \frac{w_{ik} h_{kj_n n}^2}{\alpha_{ij_n kn}} - 2 x_{ij_n n} h_{kj_n n} \right) &= 0 \\ w_{ik} \sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} \frac{h_{kj_n n}^2}{\alpha_{ij_n kn}} &= \sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n} x_{ij_n n} \\ w_{ik} &= \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n} x_{ij_n n} \alpha_{ij_n kn}}{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^2} \end{aligned}$$

上式に式 (3.6) の等号成立条件を代入すると, 次式となる.

$$w_{ik}^{(t+1)} = w_{ik}^{(t)} \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)} x_{ij_n n}^{(t)}}{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)} \left(\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)} \right)}$$

上式を行列形式で表すと次式となる.

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \odot \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{X}_n \mathbf{H}_n^\top}{\sum_{n=1}^N (\mathbf{W} \mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{H}_n^\top} \quad (3.8)$$

同様に, $\partial \mathcal{J}^+ / \partial f_{ikn} = 0$ 及び $\partial \mathcal{J}^+ / \partial h_{kj_n n} = 0$ より, \mathbf{F}_n 及び \mathbf{H}_n の更新式はそれぞれ次式となる.

$$\begin{aligned} f_{ikn}^{(t+1)} &= f_{ikn}^{(t)} \frac{\sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)} x_{ij_n n}^{(t)}}{\sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)} \left(\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)} \right)} \\ h_{kj_n n}^{(t+1)} &= h_{kj_n n}^{(t)} \frac{\sum_{i=1}^I x_{ij_n n} \left(w_{ik}^{(t)} + f_{ikn}^{(t)} \right)}{\sum_{i=1}^I \left(w_{ik}^{(t)} + f_{ikn}^{(t)} \right) \left(\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)} \right)} \end{aligned}$$

上式を行列形式で表すと次式となる.

$$\mathbf{F}_n \leftarrow \mathbf{F}_n \odot \frac{\mathbf{X}_n \mathbf{H}_n^\top}{(\mathbf{W} \mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n \mathbf{H}_n) \mathbf{H}_n^\top} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{H}_n \leftarrow \mathbf{H}_n \odot \frac{(\mathbf{W} + \mathbf{F}_n)^\top \mathbf{X}_n}{(\mathbf{W} + \mathbf{F}_n)^\top (\mathbf{W} \mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n \mathbf{H}_n)} \quad (3.10)$$

3.4.2 一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンスに基づく BSNMF

式 (3.4) について次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\equiv \sum_{n=1}^N \mathcal{D}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ij_n n} \log x_{ij_n n} - x_{ij_n n} \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) \right. \\ &\quad \left. - x_{ij_n n} + \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right] \end{aligned}$$

上式の第 2 項について Jensen の不等式を適用する.

$$\begin{aligned} & - \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) \\ &= - \log \left(\sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\alpha_{ij_n kn}} + \sum_{k=1}^K \beta_{ij_n kn} \frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\beta_{ij_n kn}} \right) \\ &\leq - \sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} \log \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\alpha_{ij_n kn}} - \sum_{k=1}^K \beta_{ij_n kn} \log \frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\beta_{ij_n kn}} \end{aligned}$$

ここで, $\alpha_{ij_n kn} > 0$ 及び $\beta_{ij_n kn} > 0$ は $\sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} + \sum_{k=1}^K \beta_{ij_n kn} = 1$ を満たす補助変数である. 上式の等号条件を次に示す.

$$\alpha_{ij_n kn} = \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n} h_{k'j_n n}} \quad (3.11)$$

$$\beta_{ij_n kn} = \frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n} h_{k'j_n n}} \quad (3.12)$$

従って, $\mathcal{J} \leq \mathcal{J}^+$ なる補助関数 \mathcal{J}^+ が次式として設計できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ij_n n} \log x_{ij_n n} - x_{ij_n n} \sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} \log \frac{w_{ikn} h_{kj_n n}}{\alpha_{ij_n kn}} \right. \\ &\quad \left. - x_{ij_n n} \sum_{k=1}^K \beta_{ij_n kn} \log \frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\beta_{ij_n kn}} - x_{ij_n n} + \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right] \\ &\equiv \mathcal{J}^+ \end{aligned}$$

$\partial \mathcal{J}^+ / \partial w_{ik} = 0$ より, \mathbf{W} の更新式が得られる.

$$\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} \left(-x_{ij_n n} \alpha_{ij_n kn} \frac{\alpha_{ij_n kn}}{w_{ik} h_{kj_n n}} \frac{h_{kj_n n}}{\alpha_{ij_n kn}} + h_{kj_n n} \right) = 0$$

$$w_{ik} \sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n} = \sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} x_{ij_n n} \alpha_{ij_n kn}$$

$$w_{ik} = \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} x_{ij_n n} \alpha_{ij_n kn}}{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}} \quad (3.13)$$

上式に式 (3.11) の等号成立条件を代入すると, 次式となる.

$$w_{ik}^{(t+1)} = w_{ik}^{(t)} \frac{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)} \frac{x_{ij_n n}}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik' j_n n}^{(t)} h_{k' j_n n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik' n}^{(t)} h_{k' j_n n}^{(t)}}}{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)}} \quad (3.14)$$

上式を行列形式で表すと次式となる.

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \odot \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{X}_n}{\mathbf{W} \mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n \mathbf{H}_n} \mathbf{H}_n^T}{\sum_{n=1}^N \mathbf{E} \mathbf{H}_n^T} \quad (3.15)$$

同様に, $\partial \mathcal{J}^+ / \partial f_{ikn} = 0$ 及び $\partial \mathcal{J}^+ / \partial h_{kj_n n} = 0$ より, \mathbf{F}_n 及び \mathbf{H}_n の更新式はそれぞれ次式となる.

$$f_{ikn}^{(t+1)} = f_{ikn}^{(t)} \frac{\sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)} \frac{x_{ij_n n}}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik' j_n n}^{(t)} h_{k' j_n n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik' n}^{(t)} h_{k' j_n n}^{(t)}}}{\sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)}} \quad (3.16)$$

$$h_{kj_n n}^{(t+1)} = h_{kj_n n}^{(t)} \frac{\sum_{i=1}^I \left(w_{ik}^{(t)} + f_{ikn}^{(t)} \right) \frac{x_{ij_n n}}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik' j_n n}^{(t)} h_{k' j_n n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik' n}^{(t)} h_{k' j_n n}^{(t)}}}{\sum_{i=1}^I \left(w_{ik}^{(t)} + f_{ikn}^{(t)} \right)} \quad (3.17)$$

上式を行列形式で表すと次式となる.

$$\mathbf{F}_n \leftarrow \mathbf{F}_n \odot \frac{\mathbf{X}_n}{\mathbf{W} \mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n \mathbf{H}_n} \mathbf{H}_n^T \quad (3.18)$$

$$\mathbf{H}_n \leftarrow \mathbf{H}_n \odot \frac{(\mathbf{W} + \mathbf{F}_n)^T \mathbf{X}_n}{(\mathbf{W} + \mathbf{F}_n)^T \mathbf{E}} \quad (3.19)$$

3.4.3 Itakura–Saito ダイバージェンスに基づく BSNMF

式 (3.5) について次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\equiv \sum_{n=1}^N \mathcal{D}_{\text{IS}}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[\frac{x_{ij_n n}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n}} - \log x_{ij_n n} \right. \\ &\quad \left. + \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

上式 (3.20) の $\left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right)^{-1}$ について Jensen の不等式を適用する.

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right)^{-1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\alpha_{ij_n kn}} + \sum_{k=1}^K \beta_{ij_n kn} \frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\beta_{ij_n kn}} \right)^{-1} \\ &\leq \sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} \left(\frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\alpha_{ij_n kn}} \right)^{-1} + \sum_{k=1}^K \beta_{ij_n kn} \left(\frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\beta_{ij_n kn}} \right)^{-1} \\ &= \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{ij_n kn}^2}{w_{ik} h_{kj_n n}} + \sum_{k=1}^K \frac{\beta_{ij_n kn}^2}{f_{ikn} h_{kj_n n}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで, $\alpha_{ij_n kn} > 0$ 及び $\beta_{ij_n kn} > 0$ は $\sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} + \sum_{k=1}^K \beta_{ij_n kn} = 1$ を満たす補助変数である. 上式の等号成立条件を次に示す.

$$\alpha_{ij_n kn} = \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n} h_{k'j_n n}} \quad (3.22)$$

$$\beta_{ij_n kn} = \frac{f_{ikn} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n} h_{k'j_n n}} \quad (3.23)$$

さらに, 式 (3.20) の $\log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right)$ について接線不等式を適用する.

$$\begin{aligned} &\log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) \\ &\leq \frac{1}{\gamma_{ij_n n}} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} + \gamma_{ij_n n} \right) + \log \gamma_{ij_n n} \\ &= \frac{1}{\gamma_{ij_n n}} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) - 1 + \log \gamma_{ij_n n} \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで, $\gamma_{ijn} > 0$ は補助変数である. 上式の等号成立条件を次に示す.

$$\gamma_{ijn} = \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \quad (3.25)$$

従って, $\mathcal{J} \leq \mathcal{J}^+$ なる補助関数 \mathcal{J}^+ が次式として設計できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ijn} \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{ijnkn}^2}{w_{ik} h_{kj_n n}} + x_{ijn} \sum_{k=1}^K \frac{\beta_{ijnkn}^2}{f_{ikn} h_{kj_n n}} - \log x_{ijn} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma_{ijn}} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K f_{ikn} h_{kj_n n} \right) - 1 + \log \gamma_{ijn} - 1 \right] \\ &\equiv \mathcal{J}^+ \end{aligned}$$

$\partial \mathcal{J}^+ / \partial w_{ik} = 0$ より, \mathbf{W} の更新式が得られる.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} \left(-x_{ijn} \frac{\alpha_{ijnkn}^2}{w_{ik}^2 h_{kj_n n}} + \frac{1}{\gamma_{ijn}} h_{kj_n n} \right) &= 0 \\ w_{ik}^2 \sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} \frac{h_{kj_n n}}{\gamma_{ijn}} &= \sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} \frac{\alpha_{ijnkn}^2 x_{ijn}}{h_{kj_n n}} \\ w_{ik} &= \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} \frac{\alpha_{ijnkn}^2 x_{ijn}}{h_{kj_n n}}}{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} \frac{h_{kj_n n}}{\gamma_{ijn}}}} \quad (3.26) \end{aligned}$$

上式に式 (3.22) 及び (3.25) の等号成立条件を代入すると, 次式となる.

$$w_{ik}^{(t+1)} = w_{ik}^{(t)} \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)} \frac{x_{ijn}}{\left(\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)} \right)^2}}{\sum_{n=1}^N \sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kj_n n}^{(t)} \frac{1}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n}^{(t)} h_{k'j_n n}^{(t)}}}} \quad (3.27)$$

上式を行列形式で表すと次式となる.

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \odot \left[\frac{\sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{X}_n}{(\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n)^2} \mathbf{H}_n^T}{\sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n} \mathbf{H}_n^T} \right]^{\cdot \frac{1}{2}} \quad (3.28)$$

同様に, $\partial \mathcal{J}^+ / \partial f_{ikn} = 0$ 及び $\partial \mathcal{J}^+ / \partial h_{kjnn} = 0$ より, \mathbf{F}_n 及び \mathbf{H}_n の更新式はそれぞれ次式となる.

$$f_{ikn}^{(t+1)} = f_{ikn}^{(t)} \sqrt{\frac{\sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kjnn}^{(t)} \frac{x_{ijnn}}{\left(\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'jnn}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)}\right)^2}}{\sum_{j_n=1}^{J_n} h_{kjnn}^{(t)} \frac{1}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'jnn}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)}}}} \quad (3.29)$$

$$h_{kjnn}^{(t+1)} = h_{kjnn}^{(t)} \sqrt{\frac{\sum_{j_n=1}^{J_n} \left(w_{ik}^{(t)} + f_{ikn}^{(t)}\right) \frac{x_{ijnn}}{\left(\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'jnn}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)}\right)^2}}{\sum_{j_n=1}^{J_n} \left(w_{ik}^{(t)} + f_{ikn}^{(t)}\right) \frac{1}{\sum_{k'=1}^{K'} w_{ik'jnn}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)} + \sum_{k'=1}^{K'} f_{ik'n}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)}}}} \quad (3.30)$$

上式を行列形式で表すと次式となる.

$$\mathbf{F}_n \leftarrow \mathbf{F}_n \odot \left[\frac{\frac{\mathbf{X}_n}{(\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n)^2} \mathbf{H}_n^T}{\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n} \mathbf{H}_n^T} \right]^{\cdot \frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{H}_n \leftarrow \mathbf{H}_n \odot \left[\frac{(\mathbf{W} + \mathbf{F}_n)^T \frac{\mathbf{X}_n}{(\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n)^2}}{(\mathbf{W} + \mathbf{F}_n)^T \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n}} \right]^{\cdot \frac{1}{2}} \quad (3.32)$$

3.5 アクティベーション非共有型 BSNMF

基底ベクトル単位での共通・固有成分への分解を必要としない場合は, 式 (3.1) における $\mathbf{F}_n\mathbf{H}_n$ を $\mathbf{V}_n\mathbf{G}_n$ (但し, $\mathbf{V}_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times K_n}$ 及び $\mathbf{G}_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{K_n \times J_n}$) とすることも可能であり, 用途に応じて選択できる. このような分解モデルをアクティベーション非共有型 BSNMF と呼ぶ. 以下に, アクティベーション非共有型 BSNMF の低ランク近似分解モデルを示す.

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1 \approx \mathbf{W}\mathbf{H}_1 + \mathbf{V}_1\mathbf{G}_1 \\ \mathbf{X}_2 \approx \mathbf{W}\mathbf{H}_2 + \mathbf{V}_2\mathbf{G}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_N \approx \mathbf{W}\mathbf{H}_N + \mathbf{V}_N\mathbf{G}_N \end{cases} \quad (3.33)$$

式 (3.33) の分解モデルの各変数は, 次の最適化問題を解くことで推定できる.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{W}, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_N, \mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_N, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_N} & \sum_{n=1}^N \mathcal{D}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n) \\ \text{s.t.} & w_{ik}, v_{ikn}, h_{kjnn}, g_{k_njnn} \geq 0 \quad \forall i, j_n, k, k_n, n \end{aligned} \quad (3.34)$$

ここで, $k_n = 1, 2, \dots, K_n$ は固有基底行列 \mathbf{V}_n の基底ベクトルのインデックスを示す. 式 (3.34) に対し, 各乖離度関数を用いた式を以下に示す.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \mathcal{D}_{\text{Eu}}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \|\mathbf{X}_n - (\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n)\|_{\text{Fr}}^2 \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ij_n n} - \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k_n=1}^{K_n} v_{ik_n n} g_{k_n j_n n} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \mathcal{D}_{\text{KL}}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[x_{ij_n n} \log x_{ij_n n} - x_{ij_n n} \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k_n=1}^{K_n} v_{ik_n n} g_{k_n j_n n} \right) \right. \\ & \quad \left. - x_{ij_n n} + \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k_n=1}^{K_n} v_{ik_n n} g_{k_n j_n n} \right] \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N \mathcal{D}_{\text{IS}}(\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I \sum_{j_n=1}^{J_n} \left[\frac{x_{ij_n n}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k_n=1}^{K_n} v_{ik_n n} g_{k_n j_n n}} - \log x_{ij_n n} \right. \\ & \quad \left. + \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k_n=1}^{K_n} v_{ik_n n} g_{k_n j_n n} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

上記の最適化問題は 3.4 節と同様に導出することができる. 以下に, 各乖離度関数における更新式を示す.

- 二乗 Euclid 距離に基づくアクティベーション非共有型 BSNMF

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \odot \frac{\sum_{n=1}^N \mathbf{X}_n \mathbf{H}_n^{\text{T}}}{\sum_{n=1}^N (\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n) \mathbf{H}_n^{\text{T}}} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{V}_n \leftarrow \mathbf{V}_n \odot \frac{\mathbf{X}_n \mathbf{G}_n}{(\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n) \mathbf{G}_n^{\text{T}}} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{H}_n \leftarrow \mathbf{H}_n \odot \frac{\mathbf{W}^{\text{T}} \mathbf{X}_n}{\mathbf{W}^{\text{T}} (\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n)} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{G}_n \leftarrow \mathbf{G}_n \odot \frac{\mathbf{V}_n^{\text{T}} \mathbf{X}_n}{\mathbf{V}_n^{\text{T}} (\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n)} \quad (3.41)$$

- 一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンスに基づくアクティベーション非共有型 BSNMF

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \odot \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{X}_n}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n} \mathbf{H}_n^T}{\sum_{n=1}^N \mathbf{E}_n \mathbf{H}_n^T} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{V}_n \leftarrow \mathbf{V}_n \odot \frac{\frac{\mathbf{X}_n}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n} \mathbf{G}_n^T}{\mathbf{E}_n \mathbf{G}_n^T} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{H}_n \leftarrow \mathbf{H}_n \odot \frac{\mathbf{W}^T \frac{\mathbf{X}_n}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n}}{\mathbf{W}^T \mathbf{E}_n} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{G}_n \leftarrow \mathbf{G}_n \odot \frac{\mathbf{V}_n^T \frac{\mathbf{X}_n}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n}}{\mathbf{V}_n^T \mathbf{E}_n} \quad (3.45)$$

- Itakura-Saitou ダイバージェンスに基づくアクティベーション非共有型 BSNMF

$$\mathbf{W} \leftarrow \mathbf{W} \odot \left[\frac{\sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{X}_n}{(\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n)^2} \mathbf{H}_n^T}{\sum_{n=1}^N \frac{\mathbf{E}_n}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n} \mathbf{H}_n^T} \right]^{\cdot \frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{V}_n \leftarrow \mathbf{V}_n \odot \left[\frac{\frac{\mathbf{X}_n}{(\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n)^2} \mathbf{H}_n^T}{\frac{\mathbf{E}_n}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n} \mathbf{H}_n^T} \right]^{\cdot \frac{1}{2}} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{H}_n \leftarrow \mathbf{H}_n \odot \left[\frac{\mathbf{W}^T \frac{\mathbf{X}_n}{(\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n)^2}}{\mathbf{W}^T \frac{\mathbf{E}_n}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n}} \right]^{\cdot \frac{1}{2}} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{G}_n \leftarrow \mathbf{G}_n \odot \left[\frac{\mathbf{V}_n^T \frac{\mathbf{X}_n}{(\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n)^2}}{\mathbf{V}_n^T \frac{\mathbf{E}_n}{\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{V}_n\mathbf{G}_n}} \right]^{\cdot \frac{1}{2}} \quad (3.49)$$

3.6 本章のまとめ

本章では、提案手法である BSNMF について説明し、各変数行列の反復更新式の導出を行った。BSNMF とは、楽器音信号 \mathbf{X}_n を共通成分 $\mathbf{W}\mathbf{H}_n$ 及び固有成分 $\mathbf{E}_n\mathbf{H}_n$ の和で低ランク近似を行う手法である。また、より一般化された手法として、アクティベーション非共有型 BSNMF を定式化し、その反復更新式も示した。本論文では、以後アクティベーション共有型 BSNMF を用いることとする。次章では、提案手法を用いた音響特徴量の抽出実験について述べる。

第 4 章

音響特徴量抽出実験

4.1 はじめに

本章では，前章で提案した BSNMF に基づく音響特徴量抽出実験について示す．まず，4.2 節では実験条件について述べる．4.3 節では実験結果について考察を加える．4.4 節で本章をまとめる．

4.2 実験条件

3.4 節で提案した BSNMF を用いて，2 つの楽器音信号間の共通・固有成分がどのように抽出されるかを確認するため，musical instrument digital interface (MIDI) 音源で作成した楽器音信号信号 \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 を用いて実験を行った．各音響信号は Fig. 4.1 に示す楽譜に基づき，異なる 2 種類のピアノ音源 Iowa Piano^{*1}及び 4Front Piano^{*2}により電子的に生成した．STFT の窓長及びシフト長はそれぞれ 92.9 ms 及び 46.4 ms とし，窓関数は Hamming 窓を用いた．提案手法は一般化 Kulback–Leibler ダイバージェンスに基づく BSNMF とし，式 (3.15)，(3.18)，及び (3.19) の反復更新式を用いた．また，更新式の反復回数は 1000 回とした．基底数は $K = 6$ とし，共有基底行列 \mathbf{W} 及び固有基底行列 \mathbf{F}_n の初期値には区間 (0, 1) の



Fig. 4.1. Music scores used in experiment of acoustic feature extraction.

^{*1} <https://vst4free.com/plugin/2294/>

^{*2} <http://www.yohng.com/software/piano.html>

一様乱数を用いた。また、アクティベーション行列 \mathbf{H}_n の初期値は以下のように定めた。

- \mathbf{h}_{n1} 及び \mathbf{h}_{n2} : Fig. 4.1 の C4 音に対応する時間フレームのみ区間 (0, 1) の一様乱数, それ以外の時間フレームは 0
- \mathbf{h}_{n3} 及び \mathbf{h}_{n4} : Fig. 4.1 の E4 音に対応する時間フレームのみ区間 (0, 1) の一様乱数, それ以外の時間フレームは 0
- \mathbf{h}_{n5} 及び \mathbf{h}_{n6} : Fig. 4.1 の G4 音に対応する時間フレームのみ区間 (0, 1) の一様乱数, それ以外の時間フレームは 0

これにより, アクティベーションベクトル \mathbf{h}_{n1} 及び \mathbf{h}_{n2} に対応する基底ベクトル $\mathbf{w}_1, \mathbf{f}_{n1}$ 及び $\mathbf{w}_2, \mathbf{f}_{n2}$ には C 音の基底ベクトル, アクティベーションベクトル \mathbf{h}_{n3} 及び \mathbf{h}_{n4} に対応する基底ベクトル $\mathbf{w}_3, \mathbf{f}_{n3}$ 及び $\mathbf{w}_4, \mathbf{f}_{n4}$ には E 音の基底ベクトル, アクティベーションベクトル \mathbf{h}_{n5} 及び \mathbf{h}_{n6} に対応する基底ベクトル $\mathbf{w}_5, \mathbf{f}_{n5}$ 及び $\mathbf{w}_6, \mathbf{f}_{n6}$ には G 音の基底ベクトルがそれぞれ現れる。なお, 推定された各モデルスペクトログラムを逆 STFT で時間波形に戻す際には, 観測信号 \mathbf{X}_n に対応する位相スペクトログラムを付与した。

4.3 実験結果

Figs. 4.2–4.4 はそれぞれ, 共有基底行列 \mathbf{W} (\mathbf{X}_1 と \mathbf{X}_2 に共通するスペクトルパターン), \mathbf{X}_1 の固有基底行列 \mathbf{F}_1 (\mathbf{X}_1 に固有のスペクトルパターン), 及び \mathbf{X}_2 の固有基底行列 \mathbf{F}_2 (\mathbf{X}_2 に固有のスペクトルパターン) を示している。但し, 基底行列のグラフは全て対数振幅の片対数グラフで示している。さらに, Fig. 4.5(a) 及び (b) は各スペクトルパターンのアクティベーションである \mathbf{H}_1 及び \mathbf{H}_2 を示している。

まず, Fig. 4.1 と Fig. 4.5 を比較すると, C4 音, E4 音, 及び G4 音がそれぞれ基底ベクトル 2 本ずつでモデル化されていることが分かる。これは, 4.2 節で述べたアクティベーション行列 \mathbf{H}_1 及び \mathbf{H}_2 の初期化方法に起因しており, 期待通りの推定結果となっている。また, Fig. 4.5 を見ると, 各基底行列の偶数本目の基底ベクトル ($\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_6$ と $\mathbf{f}_{n2}, \mathbf{f}_{n4}, \mathbf{f}_{n6}$) がピアノ音のアタック部分のスペクトルを表し, 奇数本目の基底ベクトル ($\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_5$ と $\mathbf{f}_{n1}, \mathbf{f}_{n3}, \mathbf{f}_{n5}$) がサスティン部分のスペクトルを表していることがわかる。確かに, Figs. 4.2 及び 4.3 の \mathbf{w}_1 と \mathbf{f}_{11} は C4 音 (基本周波数 261.63 Hz) の調波構造が比較的明確に表れており, \mathbf{w}_2 と \mathbf{f}_{12} はハンマーが弦を打つ際の際の非調波なスペクトルとなっている。その一方で, Fig. 4.4 の \mathbf{f}_{22} は若干の調波構造が含まれており, この違いは \mathbf{X}_1 と \mathbf{X}_2 の 2 つのピアノ音の違いを吸収するために現れた成分 (両ピアノ音のスペクトル的差異) と判断できる。同様の傾向が G4 音のアタック部分をモデル化している \mathbf{f}_{16} 及び \mathbf{f}_{26} にも確認できるが, E4 音のアタック部分をモデル化している \mathbf{f}_{14} 及び \mathbf{f}_{24} には現れなかったことから, 両ピアノ音の E4 音の差異は純粋なアタック部分にのみ生じることが予測できる。

Fig. 4.6(a) 及び (b) は \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 のスペクトログラム, Fig. 4.6(c) 及び (d) は各音源の共通成分のスペクトログラム, Fig. 4.6(e) 及び (f) は各音源の固有成分のスペクトログラムを

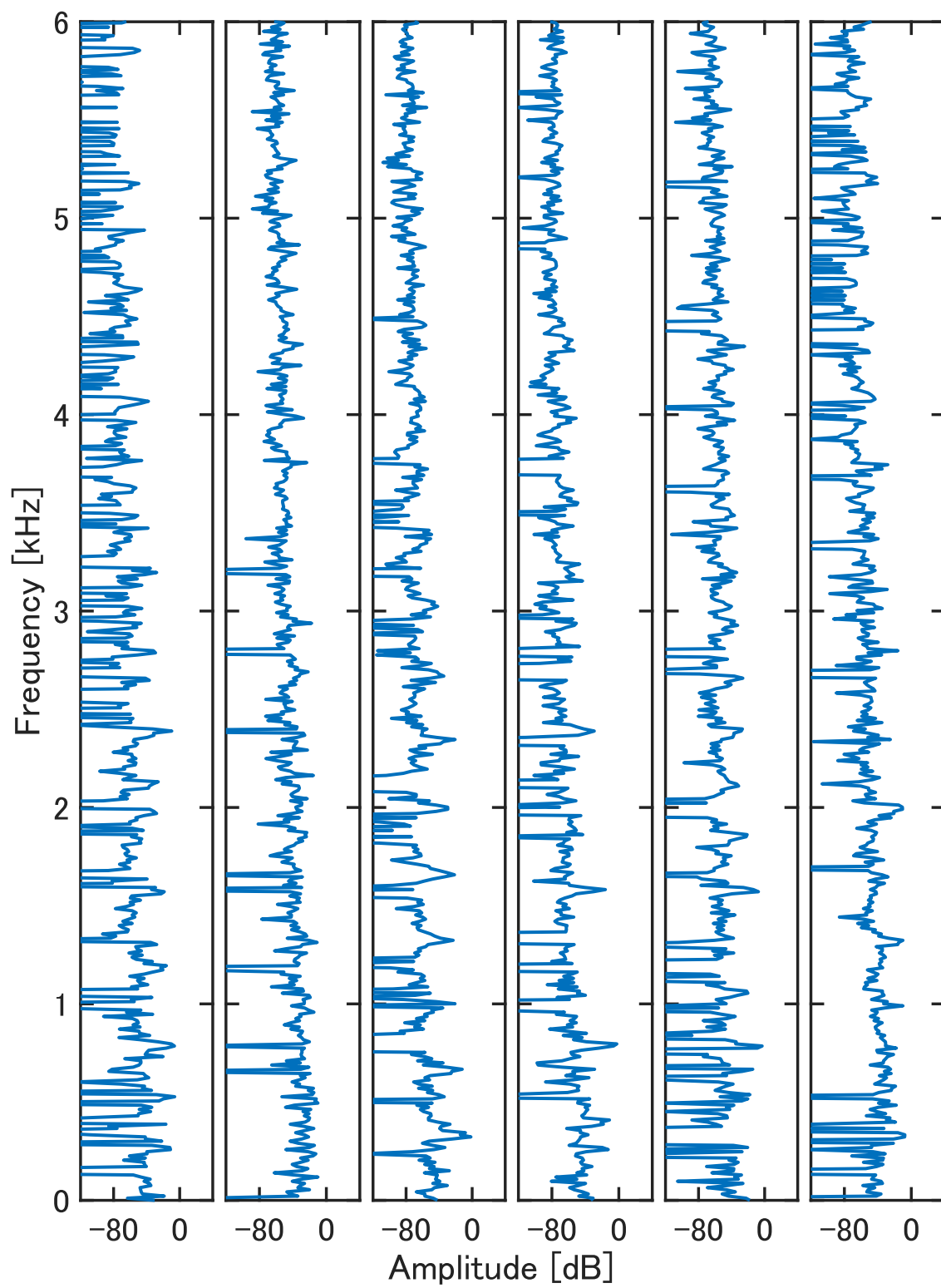


Fig. 4.2. Spectral patterns in basis matrix \mathbf{W} estimated by proposed BSNMF.

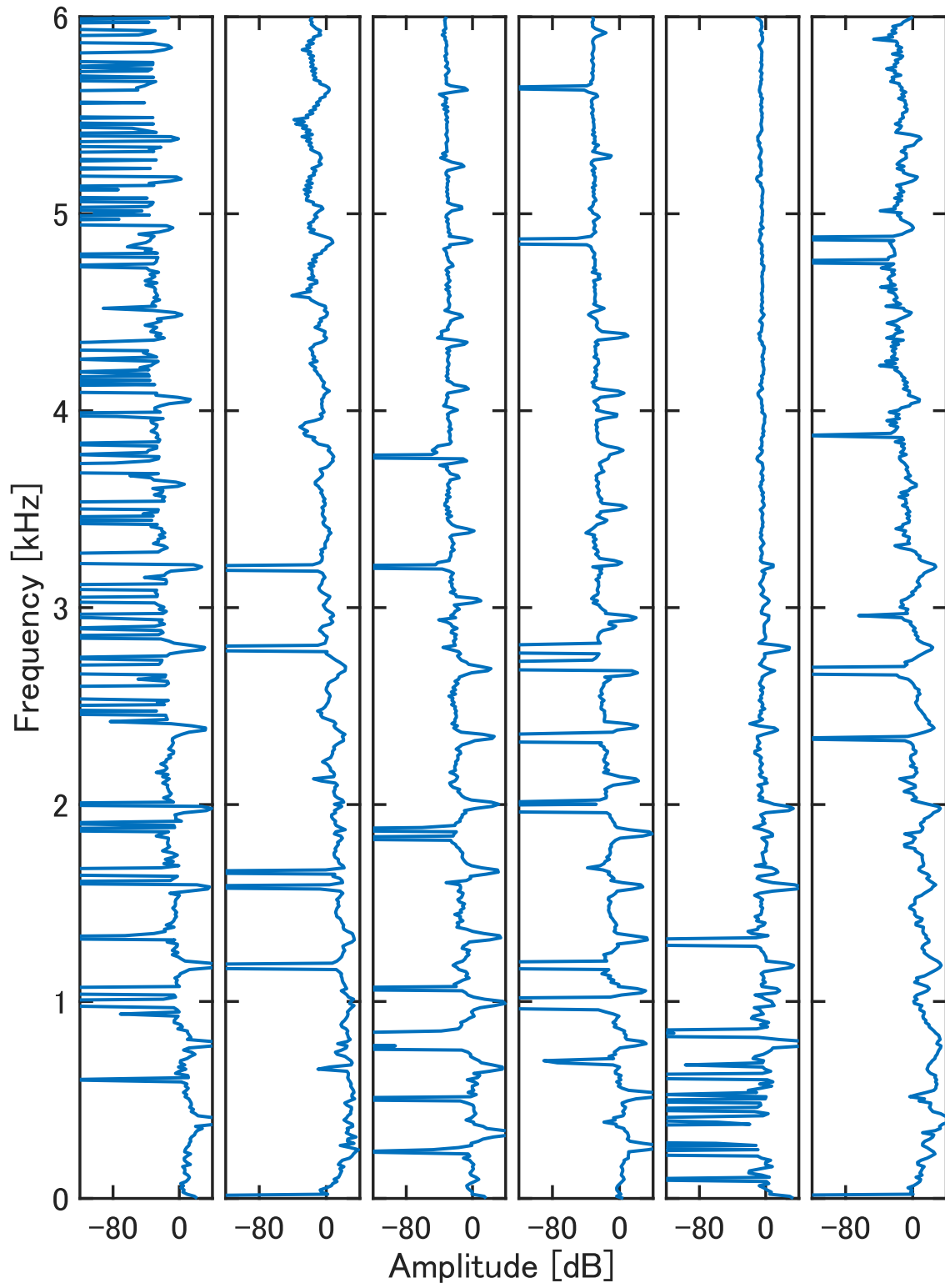


Fig. 4.3. Spectral patterns in basis matrix F_1 estimated by proposed BSNMF.

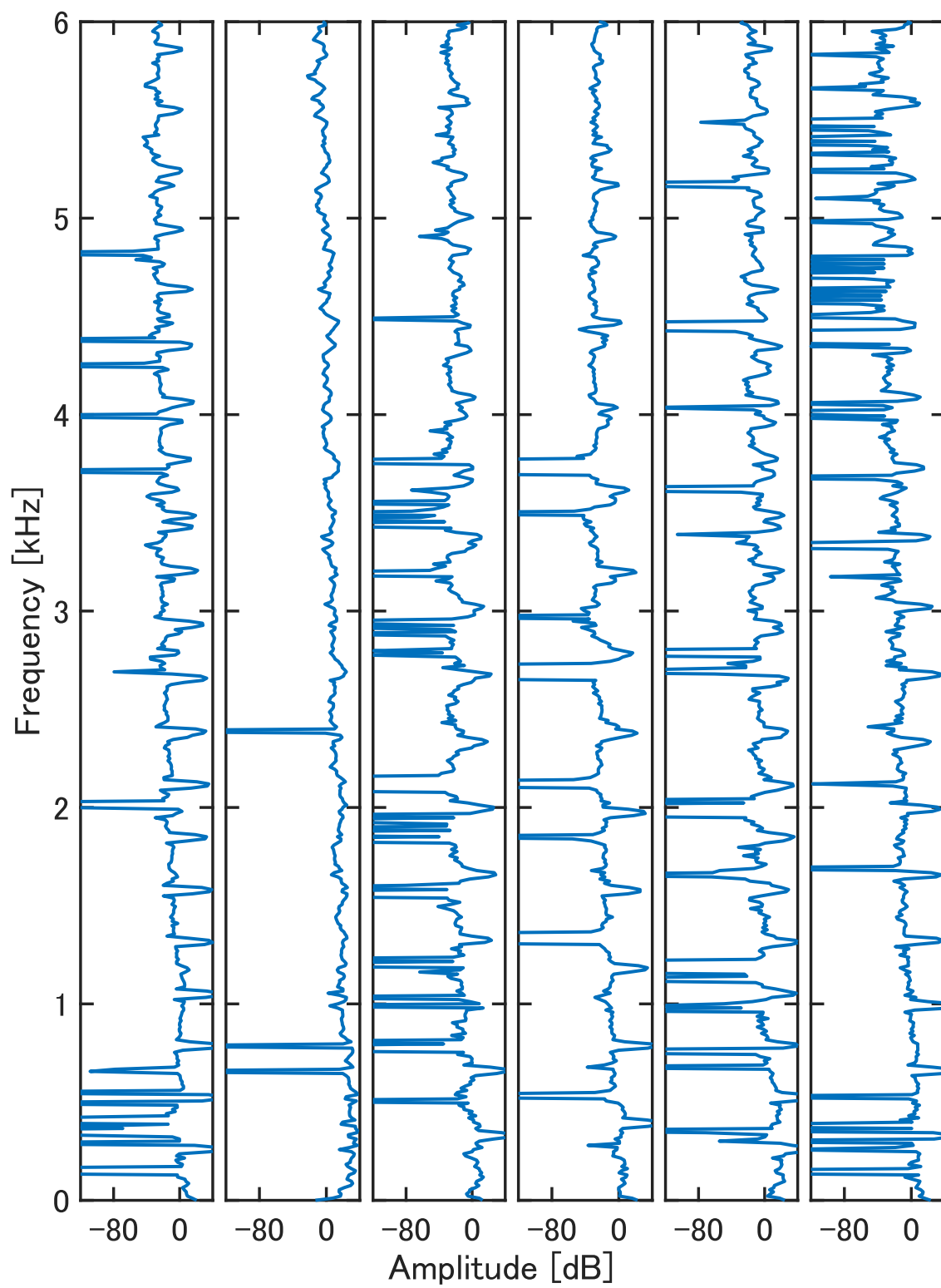


Fig. 4.4. Spectral patterns in basis matrix F_2 estimated by proposed BSNMF.

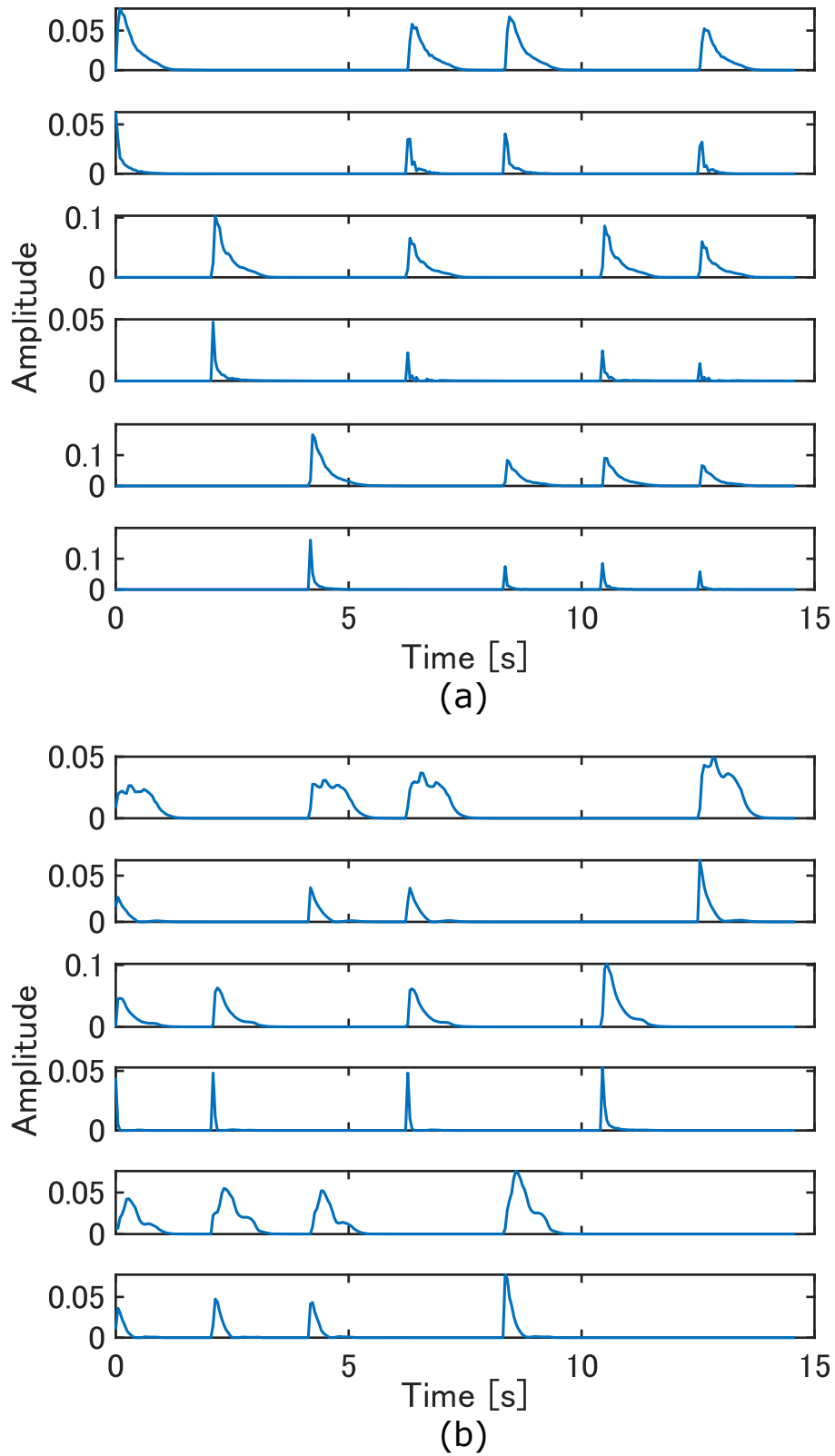


Fig. 4.5. Time-varying gains in activation matrices (a) H_1 and (b) H_2 estimated by proposed BSNMF.

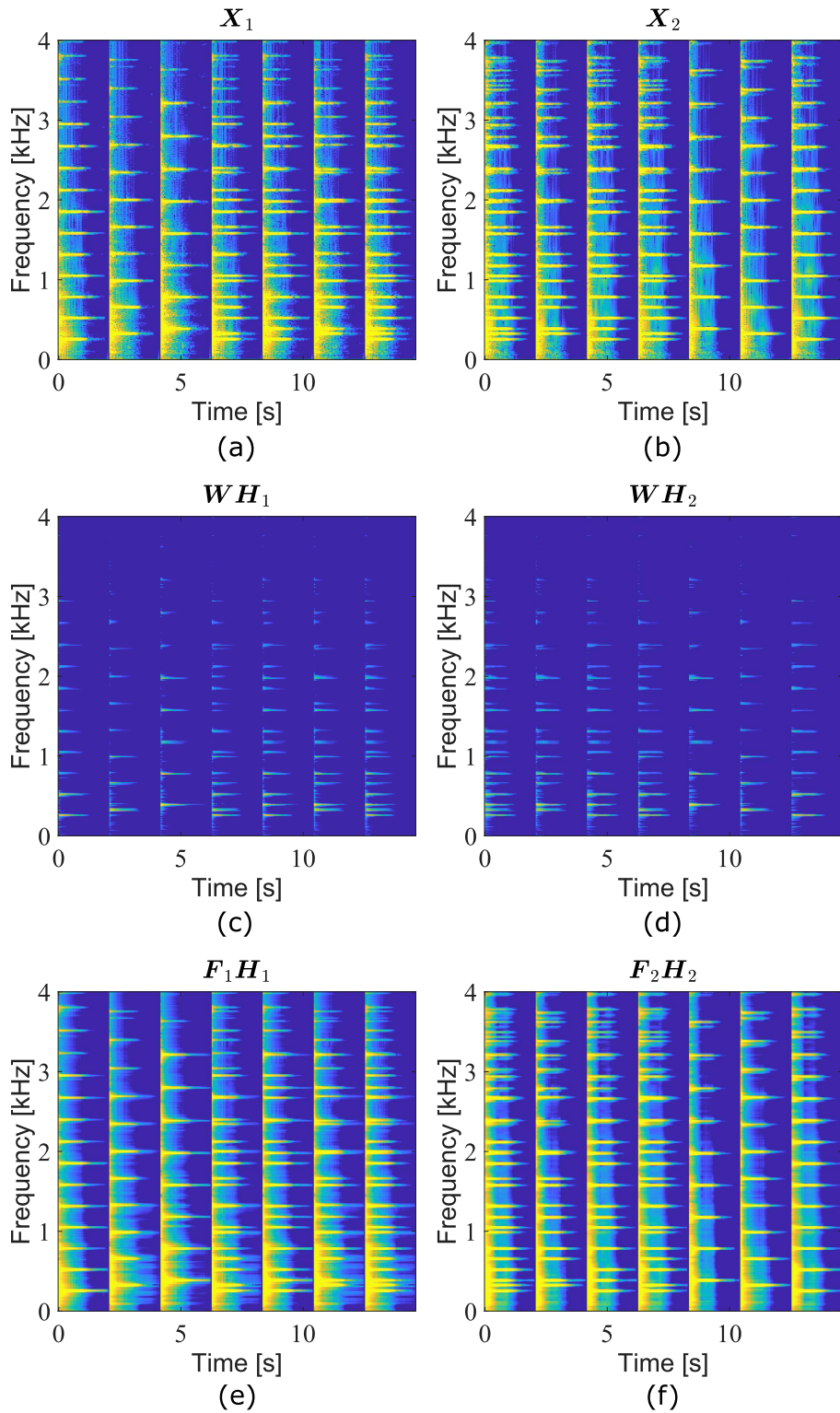


Fig. 4.6. Spectrograms of observed signals (a) X_1 and (b) X_2 and decomposed model spectrograms estimated by proposed BSNMF: common components (c) WH_1 and (d) WH_2 and individual components (e) F_1H_1 and (f) F_2H_2 .

それぞれ示している。なお、全スペクトログラムについてカラーマップは共通化しており、範囲は -35 dB から -10 dB である。これらを見ると、共通成分 $\mathbf{W}\mathbf{H}_1$ 及び $\mathbf{W}\mathbf{H}_2$ は比較的パワーが小さく、大部分が固有成分 $\mathbf{F}_1\mathbf{H}_1$ 及び $\mathbf{F}_2\mathbf{H}_2$ で表現されていることが分かる。もし基底数 K が十分大きければ、式 (3.2) の最小化は $\mathbf{X}_n \approx \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n$ とモデル化することで最小化できてしまうため、固有成分 $\mathbf{F}_n\mathbf{H}_n$ のパワーが大きくなる傾向にあることは、現時点での提案手法の課題である。それでもなお、共通成分 $\mathbf{W}\mathbf{H}_n$ にはある程度の構造が抽出されており、提案手法が複数の音響信号間の共通・固有成分抽出に活用できる可能性を示している。

4.4 本章のまとめ

本章では、BSNMF に基づく音響特徴量抽出実験の実験結果について解説を行った。実験の結果、BSNMF による共通スペクトル成分及び固有スペクトル成分の抽出が可能であることを示した。また、基底数 K の大きさにより固有成分 $\mathbf{F}_n\mathbf{H}_n$ のパワーが大きくなるという課題を得た。次章では、提案手法の応用として複数の楽器音信号の音色の変換を実験し、考察を加える。

第 5 章

音色変換への応用

5.1 はじめに

本章では、BSNMF に基づく音色変換実験について述べる。まず 5.2 節では、音色変換実験の具体的な方法について説明する。5.3 節では、音色変換実験での問題点と解決策について説明する。5.4 節では、本実験における実験条件について、5.5 節では、実験結果について述べる。5.6 節で本章をまとめる。

5.2 BSNMF に基づく楽器音信号の音色変換

Fig. 5.1 に示すように、BSNMF により推定された共有基底行列 \mathbf{W} は、2 つの楽器音信号 \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 に共通のスペクトルを表し、固有基底行列 \mathbf{F}_1 及び \mathbf{F}_2 は \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 に固有のスペクトルを表している。また、アクティベーション行列 \mathbf{H}_1 及び \mathbf{H}_2 は、2 つの楽器音信号のスペクトル $\mathbf{W} + \mathbf{F}_1$ 及び $\mathbf{W} + \mathbf{F}_2$ のアクティベーションを表しており、これ

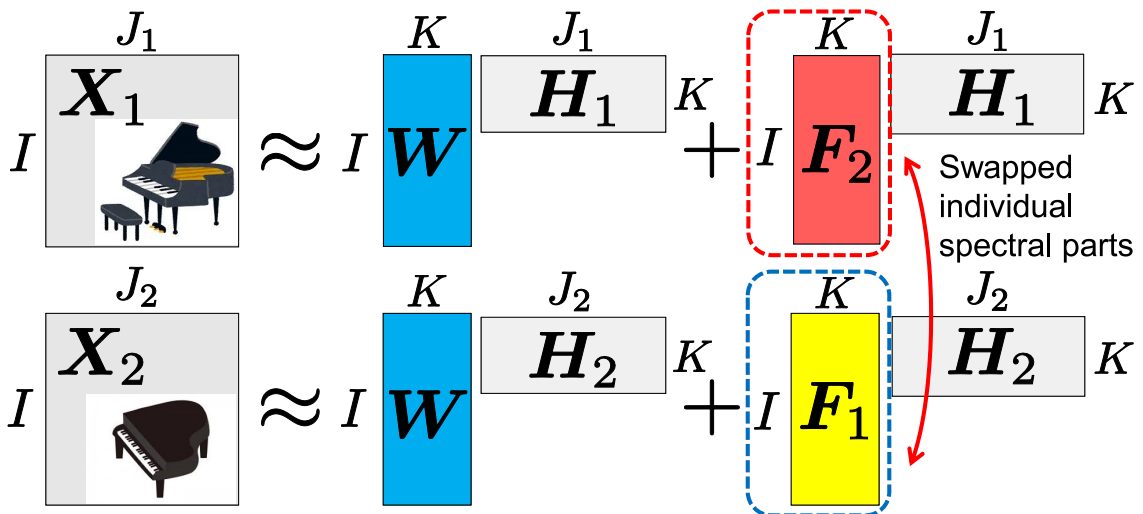


Fig. 5.1. Timbre conversion by swapping individual spectral parts estimated by BSNMF, where $N = 2$.

は、 \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 の楽譜のような情報を持っている．これらの変数行列の内、固有基底行列 ($\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$) のみを Fig. 5.1 のように 2 つの楽器音信号間に入れ替えることで、 $\mathbf{W}\mathbf{H}_1 + \mathbf{F}_2\mathbf{H}_1$ 及び $\mathbf{W}\mathbf{H}_2 + \mathbf{F}_1\mathbf{H}_2$ が得られる．これは即ち、共有基底行列 \mathbf{W} 及びアクティベーション行列 \mathbf{H}_n を変えずに、各楽器音固有のスペクトル成分を入れ替えていることになるため、「楽器音信号 \mathbf{X}_2 の音色で \mathbf{X}_1 のメロディを演奏した音響信号」及び「楽器音信号 \mathbf{X}_1 の音色で \mathbf{X}_2 のメロディを演奏した音響信号」を合成することができる．このような技術は音色変換と呼ばれ、例えば安価な楽器の音色を高級な楽器の音色に変換することや、アマチュアの演奏をプロフェッショナルの演奏に変換すること等の応用が可能となる．

5.3 スケールフィッティング

本章で取り扱う音色変換は、前節で述べた通り固有基底行列 \mathbf{F}_1 及び \mathbf{F}_2 のみを入れ替え、 $\mathbf{W}\mathbf{H}_1 + \mathbf{F}_2\mathbf{H}_1$ 及び $\mathbf{W}\mathbf{H}_2 + \mathbf{F}_1\mathbf{H}_2$ というモデルスペクトログラムを構成し、これらに観測信号 \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 の位相スペクトログラムを付与することで実現する．しかしながら、式 (3.1) の分解において、共有成分 $\mathbf{W}\mathbf{H}_n$ と固有成分 $\mathbf{F}_n\mathbf{H}_n$ がそれぞれどの程度のパワーを持っているかは楽器音信号 n によって異なる．この原因は、BSNMF の最適化問題が式 (3.2) に示すように、「 \mathbf{X}_n と $\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_n\mathbf{H}_n$ の乖離度の最小化」として定式化されているためである．即ち、楽器音信号 n 間で基底行列 \mathbf{W} は共有されているが、 \mathbf{W} と \mathbf{H}_n の間には 2.3 節で示した NMF における大きさの任意性が存在するため、共有成分 $\mathbf{W}\mathbf{H}_n$ と固有成分 $\mathbf{F}_n\mathbf{H}_n$ のパワーバランスは楽器音信号 n によって異なる．この状態で固有基底行列 \mathbf{F}_n を \mathbf{F}_m (ただし、 $m \neq n$ は変換先の楽器音信号のインデックス) に入れ替えても、構成されるモデルスペクトログラム $\mathbf{W}\mathbf{H}_n + \mathbf{F}_m\mathbf{H}_n$ は歪んだ信号となってしまう．

この問題の解決策として、固有基底行列 \mathbf{F}_n を \mathbf{F}_m に入れ替えた後に、 \mathbf{F}_m 中の各基底ベクトル \mathbf{f}_{km} のスケールを観測信号 \mathbf{X}_n のスケールにフィッティングさせる処理を施す．いま、楽器音信号 \mathbf{X}_n を m 番目の楽器音信号の音色に変換する場合、次式のモデルを仮定する．

$$\mathbf{X}_n \approx \mathbf{W}\mathbf{H}_n + (\mathbf{F}_m\mathbf{D}_n)\mathbf{H}_n \quad (5.1)$$

ここで、スケール行列 $\mathbf{D}_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{K \times K}$ は各固有基底ベクトル \mathbf{f}_{km} の大きさを定める係数 $d_{kn} \geq 0$ を対角要素に持つ対角行列である．式 (5.1) の分解モデルにおいて、左辺と右辺をできるだけ近似するスケール行列 \mathbf{D}_n を求めることでスケールフィッティングができる．これは、次の最適化問題に帰着する．

$$\min_{\mathbf{D}_n} \mathcal{D}[\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + (\mathbf{F}_m\mathbf{D}_n)\mathbf{H}_n] \quad \text{s.t. } d_{kn} \geq 0 \quad \forall k, n \quad (5.2)$$

式 (5.2) の最適化問題は、やはり通常の NMF と同様に \mathbf{D}_n の解析解は求まらない．そこで次項では、各乖離度関数でのスケール行列 \mathbf{D}_n の反復更新式を導出する．この反復更新式で \mathbf{D}_n を求めることで、音色変換された楽器音信号は $\mathbf{W}\mathbf{H}_n + (\mathbf{F}_m\mathbf{D}_n)\mathbf{H}_n$ として得られる．このモデルスペクトログラムに、観測信号 \mathbf{X}_n に対応する位相スペクトログラムを付与して逆 STFT を施し、歪みのない音色変換された楽器音信号が得られる．

5.3.1 二乗 Euclid 距離に基づくスケールフィッティング

乖離度関数として二乗 Euclid 距離を用いた場合、式 (5.2) の最小化関数は次のように変形することができる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &\equiv \mathcal{D}_{\text{Eu}}[\mathbf{X}_n | \mathbf{W}\mathbf{H}_n + (\mathbf{F}_m\mathbf{D}_n)\mathbf{H}_n] \\
&= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[x_{ij_n n} - \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right) \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[x_{ij_n n}^2 + \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2x_{ij_n n} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right) \right] \tag{5.3}
\end{aligned}$$

上式の第2項について、Jensen の不等式を適用する。

$$\left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^K \frac{w_{ik}^2 h_{kj_n n}^2}{\alpha_{ij_n kn}} + \sum_{k=1}^K \frac{d_{kn}^2 f_{ikm}^2 h_{kj_n n}^2}{\delta_{ij_n knm}} \tag{5.4}$$

ここで $\alpha_{ij_n kn} > 0$ 及び $\delta_{ij_n knm} > 0$ は $\sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} + \sum_{k=1}^K \delta_{ij_n knm} = 1$ を満たす補助変数である。上式の等号成立条件は次式となる。

$$\alpha_{ij_n kn} = \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n} f_{ik'm} h_{k'j_n n}} \tag{5.5}$$

$$\delta_{ij_n knm} = \frac{d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n} f_{ik'm} h_{k'j_n n}} \tag{5.6}$$

従って、 $\mathcal{J} \leq \mathcal{J}^+$ なる補助関数 \mathcal{J}^+ が次式として設計できる。

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &\leq \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[x_{ij_n n}^2 + \sum_{k=1}^K \frac{w_{ik}^2 h_{kj_n n}^2}{\alpha_{ij_n kn}} + \sum_{k=1}^K \frac{d_{kn}^2 f_{ikm}^2 h_{kj_n n}^2}{\delta_{ij_n knm}} \right. \\
&\quad \left. - 2x_{ij_n n} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right) \right] \\
&\equiv \mathcal{J}^+
\end{aligned}$$

$\partial \mathcal{J}^+ / \partial d_{kn} = 0$ より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[2 \frac{d_{kn} f_{ikm}^2 h_{kj_n n}^2}{\delta_{ij_n knm}} - 2 x_{ij_n n} f_{ikm} h_{kj_n n} \right] &= 0 \\ d_{kn} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{f_{ikm}^2 h_{kj_n n}^2}{\delta_{ij_n knm}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij_n n} f_{ikm} h_{kj_n n} \\ d_{kn} &= \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij_n n} f_{ikm} h_{kj_n n}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{f_{ikm}^2 h_{kj_n n}^2}{\delta_{ij_n knm}}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

式 (5.6) の等号成立条件を代入すると、次式となる。

$$d_{kn}^{(t+1)} = d_{kn}^{(t)} \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij_n n} f_{ikm} h_{kj_n n}^{(t)}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_{ikm} h_{kj_n n}^{(t)} \left(\sum_{k'=1}^K w_{ik'} h_{k'j_n n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n}^{(t)} f_{ik'm} h_{k'j_n n}^{(t)} \right)} \quad (5.8)$$

行列形式で表すと次式となる。

$$D_n \leftarrow D_n \odot \frac{F_m^T X_n H_n^T}{F_m^T [W H_n + (F_m D) H_n] H_n^T} \quad (5.9)$$

5.3.2 一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンスに基づくスケールフィッティング

乖離度関数として一般化 Kullback–Leibler ダイバージェンスを用いた場合、式 (5.2) の最小化関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\equiv \mathcal{D}_{\text{KL}} \{ X_n | W H_n + (F_m D_n) H_n \} \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[x_{ij_n n} \log x_{ij_n n} - x_{ij_n n} \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right) \right. \\ &\quad \left. - x_{ij_n n} + \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

上式の第 2 項について、Jensen の不等式を適用する。

$$\begin{aligned} & - \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right) \\ & \leq - \sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} \log \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\alpha_{ij_n kn}} - \sum_{k=1}^K \delta_{ij_n knm} \log \frac{d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n}}{\delta_{ij_n knm}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ここで $\alpha_{ijnkn} > 0$ 及び $\delta_{ijnknm} > 0$ は $\sum_{k=1}^K \alpha_{ijnkn} + \sum_{k=1}^K \delta_{ijnknm} = 1$ を満たす補助変数である。上式の等号成立条件は次式となる。

$$\alpha_{ijnkn} = \frac{w_{ik}h_{kjnn}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}h_{k'jnn} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n}f_{ik'm}h_{k'jnn}} \quad (5.12)$$

$$\delta_{ijnknm} = \frac{d_{kn}f_{ikm}h_{kjnn}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}h_{k'jnn} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n}f_{ik'm}h_{k'jnn}} \quad (5.13)$$

従って、 $\mathcal{J} \leq \mathcal{J}^+$ なる補助関数 \mathcal{J}^+ が次式として設計できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\leq \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[x_{ijnn} \log x_{ijnn} - x_{ijnn} \sum_{k=1}^K \alpha_{ijnkn} \log \frac{w_{ik}h_{kjnn}}{\alpha_{ijnkn}} \right. \\ &\quad \left. - x_{ijnn} \sum_{k=1}^K \delta_{ijnknm} \log \frac{d_{kn}f_{ikm}h_{kjnn}}{\delta_{ijnknm}} - x_{ijnn} + \sum_{k=1}^K w_{ik}h_{kjnn} + \sum_{k=1}^K d_{kn}f_{ikm}h_{kjnn} \right] \\ &\equiv \mathcal{J}^+ \end{aligned}$$

$\partial \mathcal{J}^+ / \partial d_{kn} = 0$ より

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[-x_{ijnn} \delta_{ijnknm} \frac{\delta_{ijnknm}}{d_{kn}f_{ikm}h_{kjnn}} \frac{f_{ikm}h_{kjnn}}{\delta_{ijnknm}} + f_{ijm}h_{kjnn} \right] &= 0 \\ d_{kn} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_{ikm}h_{kjnn} &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ijnn} \delta_{ijnknm} \\ d_{kn} &= \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ijnn} \delta_{ijnknm}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_{ikm}h_{kjnn}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

式 (5.13) の等号成立条件を代入すると、次式となる。

$$d_{kn}^{(t+1)} = d_{kn}^{(t)} \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{x_{ijnn}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n}^{(t)} f_{ik'm}^{(t)} h_{k'jnn}^{(t)}} f_{ikm}^{(t)} h_{kjnn}^{(t)}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J f_{ikm}^{(t)} h_{kjnn}^{(t)}} \quad (5.15)$$

行列形式で表すと次式となる。

$$D_n \leftarrow D_n \odot \frac{\mathbf{F}_m^\top \mathbf{X}_n \mathbf{H}_n^\top}{\mathbf{F}_m^\top \mathbf{W} \mathbf{H}_n + (\mathbf{F}_m D_n) \mathbf{H}_n} \quad (5.16)$$

5.3.3 Itakura–Saito ダイバージェンスに基づくスケールフィッティング

乖離度関数として Itakura–Saito ダイバージェンスを用いた場合、式 (5.2) の最小化関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\equiv \mathcal{D}_{\text{IS}} \{ \mathbf{X}_n | \mathbf{W} \mathbf{H}_n + (\mathbf{F}_m \mathbf{D}_n) \mathbf{H}_n \} \\ &= \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[\frac{x_{ij_n n}}{\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n}} - \log x_{ij_n n} \right. \\ &\quad \left. + \log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (5.17)$$

上式の第 1 項について、Jensen の不等式を適用する。

$$\left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right)^{-1} \leq \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{ij_n kn}^2}{w_{ik} h_{kj_n n}} + \sum_{k=1}^K \frac{\delta_{ij_n knm}^2}{d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n}} \quad (5.18)$$

ここで $\alpha_{ij_n kn} > 0$ 及び $\delta_{ij_n knm} > 0$ は $\sum_{k=1}^K \alpha_{ij_n kn} + \sum_{k=1}^K \delta_{ij_n knm} = 1$ を満たす補助変数である。上式の等号成立条件は次式となる。

$$\alpha_{ij_n kn} = \frac{w_{ik} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n} f_{ik'm} h_{k'j_n n}} \quad (5.19)$$

$$\delta_{ij_n knm} = \frac{d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n}}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'} h_{k'j_n n} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n} f_{ik'm} h_{k'j_n n}} \quad (5.20)$$

さらに、式 (5.17) 中の第 3 項に接線不等式を適用する。

$$\begin{aligned} &\log \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right) \\ &\leq \frac{1}{\gamma_{ij_n n}} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right) - 1 + \log \gamma_{ij_n n} \end{aligned} \quad (5.21)$$

ここで $\gamma_{ij_n n} > 0$ は補助変数である。上式の等号成立条件は次式となる。

$$\gamma_{ij_n n} = \sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \quad (5.22)$$

従って、 $\mathcal{J} \leq \mathcal{J}^+$ なる補助関数 \mathcal{J}^+ が次式として設計できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &\leq \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[x_{ij_n n} \sum_{k=1}^K \frac{\alpha_{ij_n kn}^2}{w_{ik} h_{kj_n n}} + x_{ij_n n} \sum_{k=1}^K \frac{\delta_{ij_n knm}^2}{d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n}} - \log x_{ij_n n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma_{ij_n n}} \left(\sum_{k=1}^K w_{ik} h_{kj_n n} + \sum_{k=1}^K d_{kn} f_{ikm} h_{kj_n n} \right) - 1 + \log \gamma_{ij_n n} - 1 \right] \\ &\equiv \mathcal{J}^+ \end{aligned} \quad (5.23)$$

$\partial \mathcal{J}^+ / \partial d_{kn} = 0$ より

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[-x_{ij_n} \frac{\delta_{ij_n knm}^2}{d_{kn}^2 f_{ikm} h_{kj_n n}} + \frac{1}{\gamma_{ij_n n}} f_{ikm} h_{kj_n n} \right] = 0$$

$$d_{kn}^2 \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{1}{\gamma_{ij_n n}} f_{ikm} h_{kj_n n} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij_n} \frac{\delta_{ij_n knm}^2}{f_{ikm} h_{kj_n n}}$$

$$d_{kn} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ij_n} \frac{\delta_{ij_n knm}^2}{f_{ikm} h_{kj_n n}}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{f_{ikm} h_{kj_n n}}{\gamma_{ij_n n}}}} \quad (5.24)$$

式 (5.20) 及び式 (5.22) の等号成立条件を代入すると、次式となる。

$$d_{kn}^{(t+1)} = d_{kn}^{(t)} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{x_{ij_n}}{\left(\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j_n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n}^{(t)} f_{ik'm}^{(t)} h_{k'j_n}^{(t)} \right)^2} f_{ikm}^{(t)} h_{kj_n}^{(t)}}{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{1}{\sum_{k'=1}^K w_{ik'}^{(t)} h_{k'j_n}^{(t)} + \sum_{k'=1}^K d_{k'n}^{(t)} f_{ik'm}^{(t)} h_{k'j_n}^{(t)}} f_{ikm}^{(t)} h_{kj_n}^{(t)}}}} \quad (5.25)$$

行列形式で表すと次式となる。

$$\mathbf{D}_n \leftarrow \mathbf{D}_n \odot \left[\frac{\mathbf{F}_m^T \frac{\mathbf{X}_n}{(\mathbf{W} \mathbf{H}_n + (\mathbf{F}_m \mathbf{D}_n) \mathbf{H}_n)^2} \mathbf{H}_n^T}{\mathbf{F}_m^T \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{W} \mathbf{H}_n + (\mathbf{F}_m \mathbf{D}_n) \mathbf{H}_n} \mathbf{H}_n^T} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.26)$$

5.4 実験条件

4章と同様に MIDI 音源で作成した楽器音信号 \mathbf{X}_1 及び \mathbf{X}_2 を用いて実験を行った。各楽器音信号は、Fig. 5.2 に示す楽譜に基づき、ピアノ音源 Iowa Piano 及び Sketch Upright Piano*¹により電子的に生成した。ここで、Iowa Piano はグランドピアノのサンプリング音源であり、Sketch Upright Piano はアップライトピアノのサンプリング音源である。STFT の窓長及びシフト長はそれぞれ 92.9 ms 及び 23.2 ms とし、窓関数は Hamming 窓を用いた。提案手法は二乗 Euclid 距離に基づく BSNMF とし、式 (3.8)–(3.10) の反復更新式を用いた。また、更新式の反復回数は 1000 回とした。変数行列 \mathbf{W} , \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{H}_1 , 及び \mathbf{H}_2 を推定した後、固有基底行列 \mathbf{F}_1 及び \mathbf{F}_2 を Fig. 5.1 のように入れ替え、さらに式 (5.9) を 1000 回反復更新することで、5.3 節で説明したスケールフィッティングを施した。電子楽器音を作成する際に用いた Fig. 5.2 の楽譜は、Score 1 及び 2 が 1–3 音の和音から構成され、Score 3 及び 4

*¹ <https://vis.versilstudios.com/upright-1.html>

Figure 5.2 shows six musical scores, labeled Score 1 through Score 6, arranged vertically. Each score is written on a single staff in 4/4 time, with a tempo marking of 120. The notes are primarily whole notes with stems pointing up or down. Score 1 and 2 consist of 1-3 note chords. Scores 3 and 4 consist of 2-4 note chords. Scores 5 and 6 consist of 3-5 note chords. The chords are distributed across the staff, with some notes appearing in the lower register and others in the upper register.

Fig. 5.2. Music scores used in experiment of timbre conversion: scores 1 and 2 are consist of 1–3-note chords, scores 3 and 4 are consist of 2–4-note chords, and scores 5 and 6 are consist of 3–5-note chords.

は2–4音の和音によって構成され、Score 5及び6は3–5音の和音で構成されている。そして、Score 1及び2は3個の基本音（C4音、E4音、及びG4音）が存在し、その他の和音はこの3個の基本音の組み合わせである。同様に、Score 3–6も4個の基本和音（Score 3の前半4小節、Score 4の後半4小節、Score 5の前半4小節、及びScore 6の後半4小節）が存在し、その他の4和音及び5和音はこの4個の基本和音の組み合わせとなっている。共有基底行列 \mathbf{W} 及び固有基底行列 \mathbf{F}_n の初期値には区間 $(0, 1)$ の一様乱数を用いた。また、 \mathbf{H}_n の初期値は4章と同じく、アクティベーションベクトル \mathbf{h}_{nk} を R 本ずつ各基本音に割り振り、基底ベクトルに R 本ずつ各基本音の基底が抽出されるように初期化を行った。 R の値は、Fig. 5.2の楽譜ごとに変更し、音色変換後の音質が最良となるように調節した。各楽譜での基底数 R はTable 5.1のとおりである。なお、音色変換された各モデルスペクトログラムを逆STFTで時間波形に戻す際には、変換先の観測信号 \mathbf{X}_n に対応する位相スペクトログラムを付与した。

本実験において、前節の方法で高精度に音色が変換されたかどうかを評価するために、ABX法に基づく主観評価実験を実施した。ABX法とは、被験者に対してAとBをまず提示し、その後続けてAとBのいずれかであるXを提示する実験である。被験者は最後に提示されたXがAとBのどちらと等しいかを回答する。ABX法では「AとBには差がない（区別できない）」ことを帰無仮説とし、上記試問に対する回答を複数集めることで、帰無仮説が棄却できるか否か、即ちAとBが本当に区別可能であるか否かを有意水準に基づき検定する。今、

Table 5.1. Base number of each score

Score	Number of bases for each fundamental chord
Score 1	$R = 4$
Score 2	$R = 4$
Score 3	$R = 5$
Score 4	$R = 7$
Score 5	$R = 9$
Score 6	$R = 4$

得られた回答数（標本数）を N_{answer} とし，全試問中の正答数 N_{correct} ，全試問中の誤答数を N_{wrong} ($N_{\text{wrong}} = N_{\text{answer}} - N_{\text{correct}}$) とする．帰無仮説が正しいならば，提示された X に対して「X は A か B か」という問いには正当も誤答も期待確率 $p = 0.5$ である．ABX 法では，被験者は 2 つの選択肢の内 1 つを選ぶと正当か誤答かが決するため，自由度 1 のカイ二乗分布での検定が可能である．このとき， χ^2 の値は下記のように算出できる．

$$\begin{aligned}
 \chi^2 &= \frac{(N_{\text{correct}} - N_{\text{answer}} \cdot 0.5)^2}{N_{\text{answer}} \cdot 0.5} + \frac{(N_{\text{wrong}} - N_{\text{answer}} \cdot 0.5)^2}{N_{\text{answer}} \cdot 0.5} \\
 &= \frac{(N_{\text{correct}} - N_{\text{answer}} \cdot 0.5)^2}{N_{\text{answer}} \cdot 0.5} + \frac{\{(N_{\text{answer}} - N_{\text{correct}}) - N_{\text{answer}} \cdot 0.5\}^2}{N_{\text{answer}} \cdot 0.5} \\
 &= \frac{4}{N_{\text{answer}}} \left(N_{\text{correct}} - \frac{N_{\text{answer}}}{2} \right)^2 \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

自由度 1 のカイ二乗分布の値より， $\chi^2 > 3.84$ ならば有意水準 5 % で，また $\chi^2 > 6.63$ ならば有意水準 1 % で帰無仮説が棄却される．

本節の主観評価では，2 つの異なる MIDI 音源 (Iowa Piano 及び Sketch Upright Piano) で生成した同じ楽譜の楽器音信号を A と B として被験者に提示する．その後，X として，音色変換後の同じ楽譜の楽器音信号 (Sketch Upright Piano を Iowa Piano に音色変換した合成音又は Iowa Piano を Sketch Upright Piano に音色変換した合成音) を提示し，A と B のどちらに近いかを回答させる ABX 法を実施した．このような提示は，X が A 又は B そのものではないため，本来の ABX 法とは異なる．しかしながら，次の 2 つの前提条件が成立するならば，「A と B には差がない」という帰無仮説を棄却できた場合，それは音色変換が高精度に実現できていることを示していると解釈できる．

- A と B の音色は明らかに差がある
- A と B の音色の違いは全被験者が完全に区別できる

1 つ目の前提条件は，異なる MIDI 音源を用いていることから成立する．2 つ目の前提条件は，2 年以上の楽器経験者を被験者として採用することで成り立つものと仮定する．実際に今回用いた Iowa Piano と Sketch Upright Piano は明確に音色差が聴感上感知できるものであるため，上記の 2 つの前提条件は成立しているとみなしてよい．

前述のとおり、被験者には2年以上の楽器経験者14名（男性7名及び女性7名）を用意し主観評価実験を行った。楽譜は Score 1 と Score 2, Score 3 と Score 4, Score 5 と Score 6 をそれぞれペアとして考え、各楽譜について Sketch Upright Piano を Iowa Piano に音色変換した合成音、Iowa Piano を Sketch Upright Piano に音色変換した合成音の合計12個の楽器音信号を用意し、これを提示音 X とした。この12個の X の音源それぞれに対して、「A を Iowa Piano, B を Sketch Upright Piano とした場合」及び「A を Sketch Upright Piano, B を Iowa Piano とした場合」の2パターンを考え、結果的に合計24個の ABX 音源を被験者に提示した。このとき、A と B と X は全て同じ Score の楽器音信号とした。また、A と B の間及び B と X の間にはそれぞれ1秒の無音区間を挿入した。

主観評価実験は、MATLAB で作成した GUI アプリケーションを用いて行った。以下に実験手順を示す。

1. MATLAB の GUI アプリケーションのファイルを実行する
2. Fig. 5.3(a) に示す画面が表示され、被験者はイントロダクションを読む
3. テキストボックスにユーザー名を入力し、開始ボタンを押下する
4. Fig. 5.3(b) に示す画面へ遷移し、被験者は再生ボタンを押下し、音源を視聴する
5. 視聴後に Fig. 5.3(c) の画面に遷移し、被験者は評価を行う
6. 手順4及び手順5を指定の問題数繰り返す
7. ウィンドウを閉じて終了する

このとき、入力したユーザー名をシード値とした擬似乱数を生成し、24個の音源を提示する順番を被験者ごとにランダムにしている。なお、上記の手順5において、聞き直しは2回まで可能とした。本実験では、CREATIVE 社のヘッドフォンである Aurvana Live! HP-AURVN-LV を用いた。

5.5 実験結果

実験結果として、14名の被験者の各回答の χ^2 値の箱ひげ図を Fig. 5.4 に示す。また、各被験者の年代及び性別の情報と回答結果から算出した正答率及び χ^2 値を Table 5.2 に示す。Fig. 5.4 から、 χ^2 値が多く、被験者において有意水準5%よりも高い値に位置することがわかる。例えば、全被験者の結果での中央値は $\chi^2 = 6$ となった。また Table 5.2 より、正答率が50%を下回る被験者はいなかった。以上の結果より、有意水準5%で「A と B は差がない」という帰無仮説が棄却でき、前節で述べた通りこの結果は音色変換を高精度にできているという結果を表している。また、実験後に被験者にヒヤリングを実施したところ、一部の被験者は2種類のピアノ音がグランドピアノとアップライトピアノの違いであることを認識できていた。当該被験者らの主張では、これらの違いは高周波帯域に明確に現れており、「低音の豊かな柔らかい音がグランドピアノ」及び「高音の豊かなきらびやかな音がアップライト」等と形容された。そして、「提示音 X がこれらの違いを十分反映しており、それを手がかりとして

識別できた」という意見があり，これは音色変換した音が，変換先の種類のピアノとして十分認識できることを示している．従って，被験者が形容した「低音の豊かな柔らかい音」や「高音の豊かなきらびやかな音」は固有基底行列 F_1 及び F_2 で表現されており，このような楽器経験者の主観的な形容を， F_1 及び F_2 のスペクトルとして定量的に議論できる大きな可能性を示唆している．

5.6 本章のまとめ

本章では，BSNMF の応用実験として行った音色変換実験について述べた．本実験では，ABX 法を用いた主観評価実験により音色変換の有用性を評価した．全ての被験者において正答率が 50 % を上回り，また自由度 1 のカイ二乗分布の値より，有意水準 5 % で音色変換を高精度に行うことができているという結果を示した．次章では，本論文をまとめる．



(a)



(b)



(c)

Fig. 5.3. MATLAB-based GUI application used in subjective test: (a) introduction, (b) questioning, and (c) answering screens.

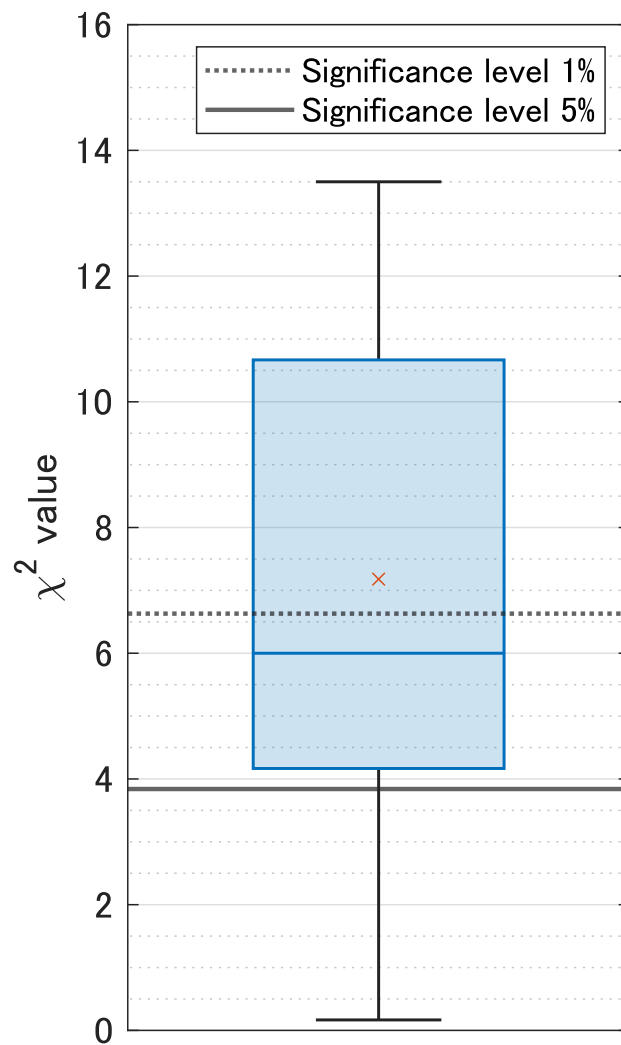


Fig. 5.4. Box plot of χ^2 values for chi-squared test. Central line of box plot indicates median, cross mark in box indicates average, and bottom and top edges of box indicate 25th and 75th percentiles, respectively.

Table 5.2. Accuracy and χ^2 value of each subject

ID	Age	Gender	Accuracy [%]	χ^2 value
Subject no.1	20s	Female	70.83	4.17
Subject no.2	30s	Female	66.67	2.67
Subject no.3	30s	Female	75.00	6.00
Subject no.4	20s	Male	70.83	4.17
Subject no.5	20s	Male	87.50	13.50
Subject no.6	Teens	Male	83.33	10.67
Subject no.7	Teens	Male	83.33	10.67
Subject no.8	Teens	Male	70.83	4.17
Subject no.9	Teens	Female	75.00	6.00
Subject no.10	Teens	Female	54.17	0.17
Subject no.11	Teens	Male	79.17	8.17
Subject no.12	20s	Female	75.00	6.00
Subject no.13	20s	Male	87.50	13.50
Subject no.14	20s	Female	83.33	10.67

第6章

結言

本論文では、客観的かつ定量的に複数の楽器音信号の違いを議論するための音響特徴量抽出法について述べた。特に、NMF と呼ばれる行列分解理論を用いた BSNMF を提案し、その有用性を実験的に調査した。音響特徴量抽出実験の実験結果より、共通のスペクトル成分と固有のスペクトル成分が抽出できていることを示した。また、音色変換実験では、主観評価実験において高精度で音色変換に成功したという結果を示した。

今後の課題を述べる。現在の BSNMF は基底行列とアクティベーション行列で基底数 K を共通としているため、基底数 K を増やすと固有部分におおよそその音響特徴量が出てしまう。本問題を解決する方法として、BSNMF の最適化問題に何らかの罰則項を付与することが考えられる。例えば、共有基底行列の要素が極端に小さくなることを防ぐことで、上記の問題を解決できる可能性がある。これにより、共通・固有成分の推定精度のさらなる向上が見込める。

最後に今後の展望を述べる。本論文では2音源の場合を取り扱ったが、一般化しているため複数音源に拡張可能である。また、前述した通り精度が向上することで、1章で述べたように、複数の楽器音信号の音響的違いや芸術的違いを客観的かつ定量的に表現・評価する音響特徴量の定義や、さらなる応用として楽器音信号の識別及び検索等にも適用することが期待される。

謝辞

本論文は、香川高等専門学校電気情報工学科北村研究室にて行われた研究に基づくものです。

まず、本研究を進めるにあたり、ご多忙のところ熱心にご指導くださいました指導教員の北村大地助教に心より感謝申し上げます。北村大地助教には、論文執筆や研究に関する議論など、細部にわたるまで丁寧にご指導いただきました。

また、副査である籾元洋一助教には本論文を査読し、助言をいただきました。

北村研究室の先輩である専攻科1年の岩瀬裕太氏には、NMFに関するアドバイス等をはじめ、温かいご指導ご鞭撻を賜りました。

また、北村研究室同期の豊島直氏・多田敏貴氏にはゼミや日頃のディスカッションのほか、1年に亘る研究室生活を様々な面で支えていただきました。ここに感謝申し上げます。

主観評価実験協力者の方々にも貴重なお時間をいただき、厚くお礼申し上げます。

参考文献

- [1] F. Zheng, G. Zhang, and Z. Song, “Comparison of different implementations of MFCC,” *Journal of Comput. Sci. and Tech.*, vol. 16, no. 5, pp. 582–589, 2001.
- [2] N. H. Fletcher and T. D. Rossing, “The physics of musical instruments,” *Springer Sci. & Business Media*, 1991.
- [3] T. Kitahara, M. Goto, K. Komatani, T. Ogata, and H. G. Okuno, “Musical instrument recognizer “instrogram” and its application to music retrieval based on instrumentation similarity,” *Proc. Int. Symp. Multimedia*, pp. 265–274, 2006.
- [4] C. Joder, S. Essid, and G. Richard, “Temporal integration for audio classification with application to musical instrument classification,” *IEEE Trans. Audio, Speech, and Lang. Process.*, vol. 17, no. 1, pp. 174–186, 2009.
- [5] D. D. Lee and H. S. Seung, “Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization,” *Nature*, vol. 401, no. 6755, pp. 788–791, 1999.
- [6] D. D. Lee and H. S. Seung, “Algorithms for non-negative matrix factorization” *Proc. Neural Info. Process. Syst.*, pp. 556–562, 2000.
- [7] C. Févotte, N. Bertin, and J.-L. Durrieu, “Nonnegative matrix factorization with the Itakura-Saito divergence. With application to music analysis,” *Neural Comput.*, vol. 21, no. 3, pp. 793–830, 2009.
- [8] D. FitzGerald, M. Cranitch, and E. Coyle, “On the use of the beta divergence for musical source separation,” *Proc. Irish Signals Syst. Conf.*, 2009.
- [9] D. Kitamura, H. Saruwatari, K. Yagi, K. Shikano, Y. Takahashi, and K. Kondo, “Music signal separation based on supervised nonnegative matrix factorization with orthogonality and maximum-divergence penalties,” *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E97-A, no. 5, pp. 1113–1118, 2014.
- [10] D. R. Hunter and K. Lange, “A tutorial on MM algorithms,” *The American Stat.*, vol. 58, no. 1, pp. 30–37, 2004.
- [11] M. Nakano, H. Kameoka, J. Le Roux, Y. Kitano, N. Ono, and S. Sagayama, “Convergence-guaranteed multiplicative algorithms for nonnegative matrix factorization with β -divergence,” *Proc. IEEE Int. Workshop Mach. Learn. Signal Process.*, 2010, pp. 283–288.

- [12] D. R. Hunter and K. Lange, “Quantile regression via an MM algorithm,” *J. Comput. Graph. Stat.*, vol. 9, no. 1, pp. 60–77, 2000.
- [13] D. Griffin and J. Lim, “Signal estimation from modified short-time Fourier transform,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 32, no. 2, pp. 236–243, 1984.
- [14] N. Perraudin, P. Balazs, and P. L. Søndergaard, “A fast Griffin–Lim algorithm,” *Proc. Workshop on Applications of Signal Process. to Audio and Acoust.*, pp. 1–4, 2013.
- [15] Y. Masuyama, K. Yatabe, and Y. Oikawa, “Griffin–Lim like phase recovery via alternating direction method of multipliers,” *IEEE Signal Process. Lett.*, vol. 26, no. 1, pp. 184–188, 2019.
- [16] Y. Masuyama, K. Yatabe, Y. Koizumi, Y. Oikawa, and N. Harada, “Deep Griffin–Lim iteration: trainable phase reconstruction using neural network,” *IEEE J. Selected Topics in Signal Process.*, vol. 15, no. 1, pp. 37–50, 2021.

発表文献一覧

国内学会

1. 香西海斗, 北村大地, “基底共有型非負値行列因子分解に基づく楽器音の共通・固有成分の分析,” 日本音響学会 2021 年春季研究発表会講演論文集, 1-9-2, 東京, 2021 年 3 月 (査読無) .

付録 A

補助関数法で利用される不等式

A.1 接線不等式

補題 A.1. (接線不等式) $f(x)$ が凹関数であるとき, 以下の不等式が成立する.

$$f(x) \leq f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x}) \quad (\text{A.1})$$

不等式中の等号が成立するための条件は $x = \bar{x}$ である.

A.2 Jensen の不等式

補題 A.2. (Jensen の不等式) $\alpha_i > 0$ を, $\sum_i \alpha_i = 1$ を満たす補助変数とする. 関数 $f(x)$ が凸関数であるとき, x_i ($i = 1, \dots, I$) に対して以下の不等式が成立する.

$$f\left(\sum_{i=1}^I \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^I \alpha_i f(x_i) \quad (\text{A.2})$$

$f(x)$ が狭義凸関数であるとき, 不等式中の等号が成立するための条件は $x_1 = \dots = x_i = \dots = x_I$ である.