

## ディリクレ分布に基づく正則化付き非負値行列因子分解\*

☆小川 遼, 北村 大地, 綾野 翔馬 (香川高専)

## 1 はじめに

非負値行列因子分解 (nonnegative matrix factorization: NMF) [1] は, 観測した非負行列  $\mathbf{X}$  を別の 2 つの非負行列  $\mathbf{W}$  及び  $\mathbf{H}$  の行列積で低ランク近似するアルゴリズムである. 音響信号処理分野では, Fig. 1 のように頻出スペクトルパターンやそのアクティビティの推定に利用され, 自動採譜 [2, 3], 音色変換 [4, 5], 音源分離 [6, 7] 等様々な用途に活用されてきた. また, NMF の変数行列  $\mathbf{W}$  及び  $\mathbf{H}$  に事前モデルを導入し最適化をより良いものへと誘導するアプローチも多様なものが提案されており, その多くは正則化付き最適化問題として定式化される. 代表的なものとして, スパース性の誘導 [8], スムース性の誘導 [9], 基底ベクトルの張る凸推の体積最小化 [10] 等がある.

前述の手法は, 変数行列に特定の事前分布を仮定した最大事後確率 (maximum a posteriori: MAP) 推定と解釈される. 本稿では, スパース正則化とスムース正則化を統合した新しい手法として, ディリクレ分布を事前分布に用いる正則化付き NMF を提案する. 提案手法では, ディリクレ分布の性質より, 正則化を与える変数行列の列又は行ベクトルの総和が 1 となる制約が担保される. このノルム制約は, 正則化付き NMF でしばしば生じるスケール任意性問題を回避できる. さらに, ディリクレ分布の母数に応じてスパース・スムースのいずれにも誘導できる利点がある.

## 2 従来手法

## 2.1 NMF の定式化

NMF では非負観測行列  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times J}$  を非負基底行列  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times K}$  及び非負係数行列  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{K \times J}$  の行列積で  $\mathbf{X} \approx \mathbf{W}\mathbf{H}$  と近似する  $\mathbf{W}$  及び  $\mathbf{H}$  を推定する. ここで,  $I$  及び  $J$  は  $\mathbf{X}$  の行及び列数,  $K$  は  $\mathbf{W}$  の列数 (基底数) である. NMF は  $\mathbf{X}$  の低ランク近似を目的とすることが多く, 通常  $K \ll I, J$  である.

$\mathbf{W}$  及び  $\mathbf{H}$  の推定は次の最小化問題となる.

$$\text{Minimize}_{\mathbf{W}, \mathbf{H}} \mathcal{D}(\mathbf{X}|\mathbf{W}\mathbf{H}) \text{ s.t. } w_{ik}, h_{kj} \geq 0 \quad \forall i, j, k \quad (1)$$

ここで,  $w_{ik}$  及び  $h_{kj}$  はそれぞれ  $\mathbf{W}$  及び  $\mathbf{H}$  の要素,  $i = 1, \dots, I$  及び  $j = 1, \dots, J$  はそれぞれ  $\mathbf{X}$  の行及び列のインデックス,  $k = 1, \dots, K$  は  $\mathbf{W}$  の列のインデックスである. また,  $\mathbf{w}_k$  を  $\mathbf{W}$  の  $k$  番目の列ベクトル (基底ベクトル),  $\mathbf{h}_k^T$  を  $\mathbf{H}$  の  $k$  番目の行ベクトル,  $\cdot^T$  を転置と定義する (Fig. 1 参照).

最適化問題 (1) 中の  $\mathcal{D}(\mathbf{X}|\mathbf{W}\mathbf{H})$  は  $\mathbf{X}$  と  $\mathbf{W}\mathbf{H}$  の乖離度を測る関数であり, 本稿では次式の一般化 Kullback-Leibler (KL) 擬距離を用いる.

$$\mathcal{D}(\mathbf{X}|\mathbf{W}\mathbf{H}) = \sum_{i,j} \left( x_{ij} \log \frac{x_{ij}}{\sum_k w_{ik} h_{kj}} - x_{ij} + \sum_k w_{ik} h_{kj} \right) \quad (2)$$

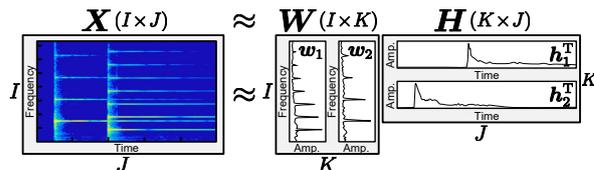


Fig. 1 Decomposition model of NMF.

ここで,  $x_{ij}$  は  $\mathbf{X}$  の要素を表す. 一般化 KL 擬距離を用いた NMF の最適化法は, 補助関数法に基づく乗算型反復更新式 [1] が有名である.

## 2.2 正則化付き NMF におけるスケール任意性問題

今, 基底行列  $\mathbf{W}$  が事前分布  $p(\mathbf{W})$  に従うと仮定すると, NMF の MAP 推定問題は次式となる.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize}_{\mathbf{W}, \mathbf{H}} \mathcal{D}(\mathbf{X}|\mathbf{W}\mathbf{H}) + \mathcal{R}(\mathbf{W}) \\ &\text{s.t. } w_{ik}, h_{kj} \geq 0 \quad \forall i, j, k \end{aligned} \quad (3)$$

ここで,  $\mathcal{R}(\mathbf{W}) = -\log p(\mathbf{W})$  は事前分布由来の正則化項である. このとき,  $\mathcal{R}(\mathbf{W})$  が  $\mathbf{W}$  のスケールに依存する関数ならば,  $\mathcal{R}(\mathbf{W})$  が最小化されるように  $\mathbf{W}$  を定数倍し, さらにその逆数を  $\mathbf{H}$  に乗じて  $\mathbf{W}\mathbf{H}$  を不変とすれば,  $\mathcal{D}(\mathbf{X}|\mathbf{W}\mathbf{H})$  も不変となるため, 最適化問題 (3) の正則化項は意味を持たなくなる [7, 8]. この問題は  $\mathbf{W}$  又は  $\mathbf{H}$  に単独で正則化を与える際に発生し,  $\mathbf{W}$  と  $\mathbf{H}$  の間にスケールの任意性が存在することに起因する. そのため, 正則化項がスケール非依存な関数となるように目的関数を設計する (例えば [7]) か,  $\|\mathbf{w}_k\| = 1 \quad \forall k$  のようなノルム制約を課して最適化問題を解く (例えば [8, 10, 11]) 必要がある.

## 3 提案手法

## 3.1 NMF にディリクレ事前分布を用いる動機

ディリクレ分布は, 非負制約とノルム制約を満たす確率変数ベクトルに対して定義され, 標準単体上の確率密度関数と解釈される. いま, ディリクレ分布に従う  $I$  次元確率変数ベクトルを  $\mathbf{z} = [z_1, \dots, z_I]^T \in \mathbb{R}_{\geq 0}^I$  と定義する. 但し,  $\mathbf{z}$  は  $\sum_i z_i = 1$  を満たす.

$$\mathbf{z} \sim p(\mathbf{z}; \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{B(\boldsymbol{\alpha})} \prod_i z_i^{\alpha_i - 1} \quad (4)$$

ここで,  $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_I]^T \in \mathbb{R}_{> 0}^I$  は母数ベクトル,  $B(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\prod_i \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}$  は多変量ベータ関数である.  $I = 3$  の時のディリクレ分布の確率密度関数を Fig. 2 に示す. ここで, 図中の三角状の台は  $(I-1)$  次元標準単体であり, 3 つの頂点がそれぞれ  $\mathbf{z} = [1, 0, 0]^T$ ,  $[0, 1, 0]^T$ , 及び  $[0, 0, 1]^T$  に対応する.

母数  $\boldsymbol{\alpha}$  は各要素が確率密度の各頂点への集中度に対応する.  $\alpha_i < 1$  のときに対応する頂点の確率密度が大きくなり,  $\alpha_i > 1$  は逆に小さくなる. また,

\*Nonnegative matrix factorization with Dirichlet-distribution-based regularization. By Haru OGAWA, Daichi KITAMURA, and Shoma AYANO (NIT, Kagawa).

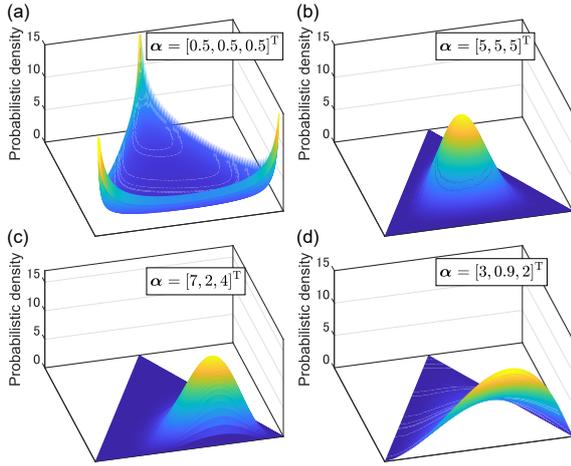


Fig. 2 Dirichlet distributions when  $I = 3$ , where support triangle indicates standard  $(I - 1)$ -simplex.

$\alpha_i = 1 \forall i$  のとき、標準単体上で一様な確率密度となる。従って、母数  $\alpha$  を変化させることで、生成される確率変数  $z$  の傾向を制御できる。Fig. 2 (a) のように  $\alpha_i < 1 \forall i$  とすれば、 $z$  は one-hot な (スパースな) ベクトルが生成されやすくなり、逆に Fig. 2 (b) のように  $\alpha_i > 1 \forall i$  とすれば、 $z$  は全要素が同じ (スムーズな) ベクトルが生成されやすくなる。

以上の性質を用いると、NMF の各ベクトル  $w_k$  や  $h_k$  をスパースやスムーズに誘導する新しい方法として、これらのベクトルの事前分布にディリクレ分布を仮定した MAP 推定を考えることができる。本稿では、この提案手法をディリクレ NMF と呼ぶ。このアプローチの利点として下記が挙げられる。

- ディリクレ分布の確率変数のノルム制約により、2.2 節で述べたスケール任意性問題は回避される
- ディリクレ分布の母数  $\alpha$  により、スパース正則化とスムーズ正則化を統一的かつ連続的に扱える

本稿では、一例として基底ベクトル  $w_k$  にディリクレ事前分布を仮定するディリクレ NMF について述べるが<sup>3</sup>、 $h_k$ 、 $\mathbf{W}$  の行ベクトル、 $\mathbf{H}$  の列ベクトル等に対しても一般性を失うことなく同様に議論可能である。

### 3.2 ディリクレ事前分布を導入した目的関数

$K$  個の基底ベクトル  $w_1, \dots, w_K$  が独立にディリクレ分布  $p(\mathbf{w}; \alpha_k)$  に従うことを仮定する。

$$w_k \sim p(\mathbf{w}; \alpha_k) \quad \forall k \quad (5)$$

$$\mathbf{W} \sim p(\mathbf{W}) = \prod_k p(\mathbf{w}; \alpha_k) |_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_k} \quad (6)$$

ディリクレ事前分布の負対数関数から得られる正則化項  $\mathcal{R}(\mathbf{W})$  は次式となる。

$$\begin{aligned} -\log p(\mathbf{W}) &= -\log \prod_k p(\mathbf{w}; \alpha_k) |_{\mathbf{w}=\mathbf{w}_k} \\ &= \sum_k \left[ \log B(\alpha) - \sum_i (\alpha_{ik} - 1) \log w_{ik} \right] \\ &\stackrel{c}{=} \sum_{i,k} (\alpha_{ik} - 1) \log w_{ik}^{-1} \\ &\equiv \mathcal{R}(\mathbf{W}) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $\alpha_{ik}$  は  $\alpha_k$  の要素であり、 $\stackrel{c}{=}$  は定数項の違いを除いて等しいことを表す。従って、ディリクレ NMF は次のように定式化される。

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{\mathbf{W}, \mathbf{H}} \quad & \mathcal{D}(\mathbf{X} | \mathbf{W}\mathbf{H}) + \sum_{i,k} (\alpha_{ik} - 1) \log w_{ik}^{-1} \\ \text{s.t.} \quad & w_{ik}, h_{kj} \geq 0 \quad \forall i, j, k, \quad \sum_i w_{ik} = 1 \quad \forall k \end{aligned} \quad (8)$$

制約条件として、各変数の非負制約に加えて、 $w_k$  のノルム制約が追加されている。以後、ディリクレ NMF の目的関数を  $\mathcal{J} = \mathcal{D}(\mathbf{X} | \mathbf{W}\mathbf{H}) + \mathcal{R}(\mathbf{W})$  と表記する。

### 3.3 最適化アルゴリズムの導出

NMF の文脈では補助関数法に基づく乗算型反復更新式 [1] がよく導出される。この手法は、直接最適化が難しい目的関数に対して、(a) 現在の変数の地点で一定の要件を満たす補助関数を設計、(b) 補助関数の停留点を閉形式で求めて次の地点の変数として更新、の 2 ステップを反復することで、本来の目的関数を間接的に最小化する。本稿においても、最適化問題 (8) に対して同様のアプローチを適用する。ただし、従来の NMF における補助関数法 [1] では、変数の非負制約を陽に扱うことなく、「乗算型の更新式を導出すること」及び「変数の初期値を正值とすること」の 2 点で暗に非負制約を満たすような変数更新を実現している。ディリクレ NMF では、非負制約に加えて  $w_k$  のノルム制約も課す必要があるため、前述の (a) ステップで設計した補助関数に対して、(b) ステップを等式・不等式制約条件付き最小化問題と捉え、ラグランジュの未定乗数法とカルーシュ・クーン・タッカー (Karush–Kuhn–Tucker: KKT) 条件を用いて解く<sup>1</sup>。

ディリクレ NMF の反復更新式の導出では、一般化 KL 擬距離 (2) にイェンゼンの不等式を適用し次式のように変形するだけでよい。

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{X} | \mathbf{W}\mathbf{H}) & \\ &\stackrel{c}{=} \sum_{i,j} \left( -x_{ij} \log \sum_k w_{ik} h_{kj} + \sum_k w_{ik} h_{kj} \right) \\ &\leq \sum_{i,j} \left( -x_{ij} \sum_k \delta_{ijk} \log \frac{w_{ik} h_{kj}}{\delta_{ijk}} + \sum_k w_{ik} h_{kj} \right) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta_{ijk} > 0$  はイェンゼンの不等式の補助変数であり  $\sum_k \delta_{ijk} = 1 \forall i, j$  を満たす。従って、目的関数全体の補助関数  $\mathcal{J}^+ \geq \mathcal{J}$  は次のように設計できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^+ &\stackrel{c}{=} \sum_{i,j} \left( -x_{ij} \sum_k \delta_{ijk} \log \frac{w_{ik} h_{kj}}{\delta_{ijk}} + \sum_k w_{ik} h_{kj} \right) \\ &\quad + \sum_{i,k} (\alpha_{ik} - 1) \log w_{ik}^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\mathcal{J}^+ = \mathcal{J}$  を満たす補助変数は次式となる。

$$\delta_{ijk} = \frac{w_{ik} h_{kj}}{\sum_{k'} w_{ik'} h_{k'j}} \quad (10)$$

<sup>1</sup>文献 [11] も同様に補助関数 (文献では majorizer) の最小化問題に制約条件を課して解いているが、本稿とは解法が異なる。

補助関数  $\mathcal{J}^+$  に対して、次の等式・不等式制約条件付き最小化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \mathcal{J}^+ \\ & \mathbf{W}, \mathbf{H}, \Delta \\ \text{s.t. } & w_{ik}, h_{kj} \geq 0 \quad \forall i, j, k, \quad \sum_i w_{ik} = 1 \quad \forall k \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\Delta$  は  $\delta_{ijk}$  を全インデックスに関してまとめた集合である。ラグランジアンは次式となる。

$$\mathcal{L} = \mathcal{J}^+ + \sum_k \lambda_k \left( \sum_i w_{ik} - 1 \right) \quad (12)$$

ここで、 $\lambda_k \geq 0$  はラグランジュ乗数を表す。非負制約条件付き最適化問題の KKT 条件より、次式を得る。

$$w_{ik} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ik}} = 0 \quad \forall i, k \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{ik}} \geq 0 \quad \forall i, k \quad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_k} = 0 \quad \forall k \quad (15)$$

式(13)より、 $\mathcal{L}$ の最小解は  $w_{ik} = 0$  又は  $\partial \mathcal{L} / \partial w_{ik} = 0$  のいずれかを満たす。今、 $\partial \mathcal{L} / \partial w_{ik} = 0$  を満たす  $w_{ik}$  を  $\hat{w}_{ik}$  とおくと、 $w_{ik} \geq 0$  及び式(14)の2条件より、 $\hat{w}_{ik} \geq 0$  ならば  $\hat{w}_{ik}$  を最小解とし、 $\hat{w}_{ik} < 0$  ならば  $w_{ik} = 0$  を最小解とすれば、最適化問題(11)の  $w_{ik}$  に関する最小化ができる。即ち、 $h_{kj}$  及び  $\delta_{ijk}$  を固定した際の  $w_{ik}$  の制約条件付き最小解は次式となる。

$$w_{ik} = \begin{cases} \hat{w}_{ik} & (\text{if } \hat{w}_{ik} \geq 0) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (16)$$

以後、 $\hat{w}_{ik}$  を求める。 $\partial \mathcal{L} / \partial w_{ik} = 0$  より

$$\sum_j \left( -x_{ij} \frac{\delta_{ijk}}{\hat{w}_{ik}} + h_{kj} \right) - (\alpha_{ik} - 1) \frac{1}{\hat{w}_{ik}} + \lambda_k = 0$$

を得る。これを整理して、 $\hat{w}_{ik}$  は次式となる。

$$\hat{w}_{ik} = \frac{\sum_j x_{ij} \delta_{ijk} + \alpha_{ik} - 1}{\sum_j h_{kj} + \lambda_k} \quad (17)$$

また、式(15)より  $\sum_i w_{ik} - 1 = 0$  を得るが、これはノルム制約  $\sum_i w_{ik} = 1 \quad \forall k$  と等価である。このノルム制約に式(16)を代入して、次式を得る。

$$\sum_i \max(\hat{w}_{ik}, 0) = 1 \quad (18)$$

ここで、 $\max(\cdot, \cdot)$  は入力値の大きい方を返す。式(17)を式(18)に代入すると、 $\hat{w}_{ik}$  の分母は非負値のため

$$\sum_j h_{kj} + \lambda_k = \sum_i \max \left( \sum_j x_{ij} \delta_{ijk} + \alpha_{ik} - 1, 0 \right) \quad (19)$$

が得られる。式(19)を式(17)の分母に代入してラグランジュ乗数  $\lambda_k$  を消去すると、次式となる。

$$\hat{w}_{ik} = \frac{\sum_j x_{ij} \delta_{ijk} + \alpha_{ik} - 1}{\sum_i \max \left( \sum_j x_{ij} \delta_{ijk} + \alpha_{ik} - 1, 0 \right)} \quad (20)$$

以上より、補助関数  $\mathcal{J}^+$  の制約条件付き最小解は式(16)及び(20)である。なお、補助変数の等号成立条件(10)を式(20)に代入すると、 $\hat{w}_{ik}$  は次式となる。

$$\hat{w}_{ik} = \frac{w_{ik} \sum_j \frac{x_{ij}}{\sum_{k'} w_{ik'} h_{k'j}} h_{kj} + \alpha_{ik} - 1}{\sum_i \max \left( w_{ik} \sum_j \frac{x_{ij}}{\sum_{k'} w_{ik'} h_{k'j}} h_{kj} + \alpha_{ik} - 1, 0 \right)} \quad (21)$$

式(16)及び(21)をみると、 $\mathbf{W}$  の非負制約とノルム制約が必ず満たされる更新式であることが分かる。

ディリクレ NMF では変数行列  $\mathbf{W}$  及び  $\mathbf{H}$  を正値の乱数で初期化し、 $\mathbf{W}$  を式(16)及び(21)で更新した後に係数行列  $\mathbf{H}$  を更新する、という処理を反復することで最適化が可能である<sup>2</sup>。このとき、 $\mathbf{H}$  の反復更新式については、文献[1]と同様である。これらの反復更新式は補助関数法に基づくことから、反復毎の目的関数値の単調非増加性が理論的に保証される。

## 4 実験

### 4.1 実験条件

本章では、前章で導出したディリクレ NMF の反復更新式が、目的関数値の単調非増加性を保ったまま収束することを確認する。また、ディリクレ NMF で推定される基底ベクトル  $\mathbf{w}_k$  が、事前に与える母数  $\alpha_k$  に応じた構造を持つよう誘導されることを確認する。

実験では、Fig. 3 (a) に示す 5 行 3 列の基底行列及び 3 行 10 列の係数行列を用意した。このとき、基底行列の 2 列は one-hot なベクトルとし、残りの 1 列は全て同値のスムーズなベクトルとした。係数行列の各要素は区間 (0, 1) の一様分布から生成した。これらの行列積として 5 行 10 列の観測行列  $\mathbf{X}$  を用意した。

実験として、観測行列  $\mathbf{X}$  を NMF で近似分解して得られる  $\mathbf{W}$  及び  $\mathbf{H}$  が、Fig. 3 (a) の真の基底行列及び係数行列を精度よく推定できるかを調査した。比較対象には、正則化の無い単純な（一般化 KL 擬距離基準の）NMF とディリクレ NMF を用いた。これらの NMF の基底数は  $\mathbf{X}$  のランクと等しい  $K = 3$  に設定し、反復更新回数は 100 回とした。 $\mathbf{W}$  及び  $\mathbf{H}$  の初期値は区間 (0, 1) の一様分布から生成した。但し  $\mathbf{W}$  については、初期値がノルム制約を満たすように  $\mathbf{W}$  の各列ベクトルを正規化した。また、正則化の無い単純な NMF も、 $\mathbf{W}$  の各列ベクトルを正規化し、正規化係数の逆数を  $\mathbf{H}$  の各行ベクトルに乗じて  $\mathbf{WH}$  が不変となる処理を反復毎に施した。ディリクレ NMF の母数は  $\alpha_1 = \alpha_2 = [0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5]^T$  及び  $\alpha_3 = [1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5]^T$  とした。

### 4.2 実験結果

正則化の無い単純な NMF とディリクレ NMF でそれぞれ得られた  $\mathbf{W}$  及び  $\mathbf{H}$  を Fig. 3 (b) 及び (c) にそれぞれ示す。単純な NMF では真の基底行列及び係数行列を正しく推定できていないのに対し、理想的な母数を与えた場合のディリクレ NMF は正確に推定できていることが確認できる。また、ディリクレ NMF の目的関数の反復毎の値を Fig. 4 に示す。提案手法

<sup>2</sup>提案手法の MATLAB での実装を <https://github.com/d-kitamura/dirichletNmf> で公開しているので参照されたい。

(a) Basis mat. (oracle)			Coef. mat. (oracle)									
0	1	0.2	0.417	0.3023	0.1863	0.5388	0.2045	0.6705	0.1404	0.9683	0.8764	0.03905
0	0	0.2										
1	0	0.2	0.7203	0.1468	0.3456	0.4192	0.8781	0.4173	0.1981	0.3134	0.8946	0.1698
0	0	0.2										
0	0	0.2	0.0001144	0.09234	0.3968	0.6852	0.02739	0.5587	0.8007	0.6923	0.08504	0.8781

(b) Basis mat. (simple NMF)			Coef. mat. (simple NMF)									
0.02527	0.7875	0.3726	0.1908	0.3024	0.1971	0.6257	2.22e-16	0.7339	0.3024	1.117	0.6972	0.2141
0.02097	1.424e-14	0.1805										
0.9351	0.2203	0.01564	0.935	0.1694	0.3375	0.3636	1.073	0.3982	0.01888	0.2418	1.134	0.0002197
0.02097	1.16e-15	0.1805										
0.02097	7.385e-15	0.1805	2.22e-16	0.06597	0.4161	0.6848	0.03104	0.5316	0.8722	0.6323	1.885e-07	0.9334

(c) Basis mat. (Dirichlet NMF)			Coef. mat. (Dirichlet NMF)									
0	1	0.2	0.417	0.3023	0.1863	0.5388	0.2045	0.6705	0.1404	0.9683	0.8764	0.03904
0	0	0.2										
1	0	0.2	0.7203	0.1468	0.3456	0.4192	0.8781	0.4173	0.1981	0.3134	0.8946	0.1698
0	0	0.2										
0	0	0.2	0.0001144	0.09234	0.3968	0.6852	0.02739	0.5587	0.8008	0.6923	0.08504	0.8782

Fig. 3 (a) Oracle basis and coefficient matrices that produce observed matrix  $\mathbf{X}$ , (b) estimated  $\mathbf{W}$  and  $\mathbf{H}$  obtained by simple NMF, and (c) estimated  $\mathbf{W}$  and  $\mathbf{H}$  obtained by Dirichlet NMF.

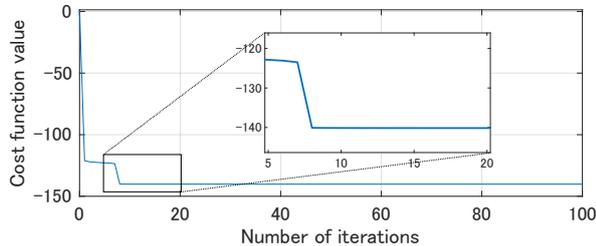


Fig. 4 Convergence behavior of Dirichlet NMF.

の反復更新式は補助関数法に基づくため、目的関数の単調非増加性が保証されており、実験的にも確認できる。また、この実験の例では20回程度の反復でほぼ収束している様子が伺える。なお、 $\mathbf{X}$ を構成する係数行列の乱数や $\mathbf{W}$ 及び $\mathbf{H}$ の乱数初期値を変化させた場合も、本節の結果と同様の傾向が観測された。

## 5 おわりに

本稿では、スパース性・スムーズ性の正則化を統一的に表現できる新しいNMFとして、ディリクレ事前分布に基づく正則化付きNMFを新たに提案した。また、補助関数法に基づく反復更新式を導出し、その有効性を実験的に確認した。今後の課題として、スパース・スムーズな時間周波数構造を持つ音響信号の表現とその応用、母数を活用した教師ありNMFへの援用等が挙げられる。

**謝辞** 本研究の一部はJSPS科研費23K24908の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] D. D. Lee and H. S. Seung, "Algorithms for non-negative matrix factorization," in *Proc. Advances in Neural Info. Process. Syst.*, 2000.
- [2] N. Bertin, R. Badeau, E. Vincent, "Enforcing harmonicity and smoothness in Bayesian non-negative matrix factorization applied to polyphonic music transcription," *IEEE Trans. Audio, Speech, and Lang. Process.*, vol. 18, no. 3, pp. 538–549, 2010.
- [3] E. Benetos, S. Dixon, Z. Duan, and S. Ewert, "Automatic music transcription: An overview," *IEEE Signal Process. Mag.*, vol. 36, no. 1, pp. 20–30, 2019.
- [4] J. Driedger, T. Prätzlich, and M. Müller, "Let it be — towards NMF-inspired audio mosaicing," in *Proc. Int. Society for Music Info. Ret. Conf.*, pp. 350–356, 2015.
- [5] 北村大地, 香西海斗, "基底共有型非負値行列因子分解を用いた楽器音の音色変換," *音楽情報科学研究会 第131回音楽情報科学研究会*, vol. 2021-MUS-131, no. 10, pp. 1–6, 2021.
- [6] C. Févotte, E. Vincent, and A. Ozerov, "Single-channel audio source separation with NMF: Divergences, constraints and algorithms," in *Audio Source Separation*, S. Makino, Ed., pp. 1–24. Springer, Cham, 2018.
- [7] Y. Iwase and D. Kitamura, "Supervised audio source separation based on nonnegative matrix factorization with cosine similarity penalty," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E105-A, no. 6, pp. 906–913, 2022.
- [8] A. Marmin, J. H. d. M. Goulart, and C. Févotte, "Majorization-minimization for sparse nonnegative matrix factorization with the  $\beta$ -Divergence," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 71, pp. 1435–1447, 2023.
- [9] T. Virtanen, "Monaural sound source separation by nonnegative matrix factorization with temporal continuity and sparseness criteria," *IEEE Trans. Audio, Speech, and Lang. Process.*, vol. 15, no. 3, pp. 1066–1074, 2007.
- [10] V. Leplat, N. Gillis, and A. M. S. Ang, "Blind audio source separation with minimum-volume beta-divergence NMF," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 68, pp. 3400–3410, 2020.
- [11] V. Leplat, N. Gillis, and J. Idier, "Multiplicative updates for NMF with  $\beta$ -divergences under disjoint equality constraints," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 42, no. 2, pp. 730–752, 2021.